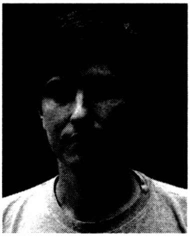
周 期

Periods

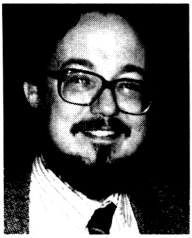
M. コンツェビッチ/D. ザギエ　●訳：黒川 信重（東京工業大学）

【著者紹介】



マキシム・コンツェビッチ (Maxim Kontsevich)

1964年，モスクワ近郊に生まれる．モスクワ大学で数学を学び,1992年にボン大学で博士号を取得．ロシア，ドイツ,アメリカで研究を続ける．1995年フランスの科学高等学院(IHES)の教授となり，現在にいたる．
研究対象は，理論物理学の数学的側面，特に弦理論と位相的量子場の理論に集中していて，なかでも変形理論とオペランドについての研究は，多様体とモチーフの位相幾何学，普遍代数，非可換幾何学の3つの間に新しい関係を与えた．
1998年，34歳のときにチューリッヒで開かれた国際数学者会議でフィールズ賞を受賞した．



ドン・ザギエ (Don Zagier)

1951年，ハイデルベルクに生まれる．
1968年にマサチューセッツ工科大学の物理学科，数学科の両方を卒業した後，1972年にはオックスフォード大学で博士号を取得した．1973年からボン大学「特別研究領域理論数学」の講座を持つ．1984年にマックス・プランク数学研究所が設立されてからは，その所員として研究活動を行う．また1979年から12年間アメリカのメリーランド大学でそしてその後は九州大学，ユトレヒト大学でも教授を歴任している．現在はマックス・プランク数学研究所の4人の理事のうちの1人であり，コレージュ・ド・フランス教授．専門は数論（特にモジュラー形式や楕円曲線に関するもの)，トポロジー，代数幾何,組合せ論，数理物理である．特に楕円曲線のL-関数についてB．グロスと行った共同研究に対して1984年にアメリカ数学会からコール賞を授与されている．他の受賞歴にドイツ科学学士院のカルース・メダル，フォン・シュタウト賞，フランス科学学士院のエリー・カルタン賞などがある．

序

数学を始めるときはさまざまな数を順々に学んで行く．まず最初に**自然数**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

を覚える．それに零と負の数を加えて**整数**

$$\mathbb{Z} = \{\dots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots\}$$

を得る．次に既約分数が加わって**有理数**

$$\mathbb{Q} = \left\{\ \frac{p}{q}\ \Big|\ p \in \mathbb{Z},\ \ q \in \mathbb{N},\ \text{g.c.d.}(p, q) = 1\ \right\}$$

となり，有理数列の極限として**実数**を得る．最後に $i^2 = -1$ をみたす記号 "i" を実数に形式的に加えて，**複素数**

$$\mathbb{C} = \{x + i \cdot y \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$$

に達する．複素数を導入することによる利点は，とりわけ，ガウスによる**代数学の基本定理**「任意の複素数係数多項式に対して，方程式

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n = 0,\ \ n > 0$$

は解 $x \in \mathbb{C}$ をもつ」にある．特に，有理数係数の代数方程式をみたす，すべての $x \in \mathbb{C}$ の集合を考えることができる．こうして得られた集合を**代数的数**の集合とよび，ふつう $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ と書く．有理数でない実代数的数の最も簡単なものは $\sqrt{2} = 1.4142135\dots$ であり，これが無理数であることはユークリッドの『原論』の中で証明されている．三角関数の有理数の角度における値もまた，代数的数である．例えば，$\sin(60^\circ) = \sqrt{3/4}$, $\tan(18^\circ) = \sqrt{1 - 2/\sqrt{5}}$ のように．

伝統的に数は次のような体系に分類されている．

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N} & \subset & \mathbb{Z} & \subset & \mathbb{Q} & \subset & \overline{\mathbb{Q}} \\ & & & & \cap & & \cap \\ & & & & \mathbb{R} & \subset & \mathbb{C} \end{array} \tag{0}$$

代数的でない数を**超越数**という．代数的数と超越数の集合の大きさには大き

な違いがある(カントール，1873)．代数的数全体の集合 $\overline{\mathbb{Q}}$ は**可算**であり，超越数全体の集合は**非可算**である．これは，“一般的な”超越数を有限の言葉で述べることはできないことを意味する．超越数はふつう無限の情報を含む．また，もし代数的であることに目に見える理由がない数があったなら，その数は超越数であると思うのが自然である．

しかしながら，さらに重要な数の類が存在する．それは $\overline{\mathbb{Q}}$ と $\mathbb{C}$ の間にあり，上の分類には欠けているものである．この“新しい”数の類，これを**周期**というが，これは数論的性質からみて，数の体系の中で，これから最も重要なものになると思われる．周期全体は可算であるが，いくつかの点で上の“一般的な”原則と矛盾している：周期はふつう超越数からなるが，それらは有限の情報で述べることができ，有限の情報のみを含み，そして，アルゴリズム的に識別することができる(と少なくとも予想できる)．周期は驚くほどひんぱんに，さまざまな公式や数学の予想に現れ，そして異なる分野からの問題たちをつなぐ橋渡しをする．この解説論文では周期とは何かを説明し，それらが現れる多くの場所のいくつかを述べる．

■**注意**　この論文は第一著者が1999年にフランス数学会年会で行った同じタイトルの講演とその折に配布された『数学と物理』中の文章を拡充したものである．拡張された部分は，より多くの例を挙げたこと，微分方程式関連の章を加えたこと，そして，バーチ・スウィンナートンダイヤー予想をより詳しく論じたところである．最後の章は第一著者のみによるものであるが，このテキストのほかの部分に比べより進んだものであり，より思弁的なものである．

1　主要諸原理

1.1　定義と諸例

次が周期の初等的な定義である．

■**定義**　ある複素数が**周期**であるとは，その実部と虚部が，有理数係数多項式の不等式で与えられる $\mathbb{R}^n$ 内の領域上での，有理数係数有理関数の絶対収

束積分の値になっていることである．

周期全体の集合を $\mathcal{P}$ と書く．これは明らかに可算である．上の定義で“有理関数”と“有理数係数”を“代数的関数”と“代数的係数”に置き換えても得られる数の集合は変わらない．例えば，有理数でない代数的数 $\sqrt{2}$ は

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \leq 1} dx$$

と表すことができ，同様に，被積分関数に現れる代数的関数は，より多くの変数を導入することにより有理関数に置き換えることができる．実際に，任意の実数値関数の積分はそのグラフの下の面積に等しい，という事実を用いると，任意の周期は，有理数係数多項式の等式で定義された領域の体積として書けることがわかるので，定数関数 1 より複雑な関数を積分する必要はない．しかし，実際には，次のようにより自由にしたほうが扱いやすいことも多い．すなわち，X を滑らかな準射影多様体とし，$Y \subset X$ を部分多様体，そして ω を X 上の閉代数的 n-形式で，Y 上で消えているものとする．これらはすべて $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義されているとする．また C を境界が $Y(\mathbb{C})$ に含まれる $X(\mathbb{C})$ 上の特異 n-チェインとする．そのとき積分 $\int_C \omega$ は周期になる．(大まかにいうと，一見するとより一般的に見える定義が，以前与えた素朴なものと等しい理由は，C は半代数的チェインに変形でき，さらに，それは代数的境界を持つ $\mathbb{R}^n$ 内の開領域へ全単射に射影できる小片の中に分解できるからである.)

代数的でない周期の最も簡単な例は直径 1 の円の円周の長さ，π である：

$$\pi = 3.1415926\ldots .$$

この数は数学で最も有名な定数であり至るところに現れる．例えば，3 次元単位球の体積は $\frac{4}{3}\pi$ (アルキメデスの結果) である．また π は高次元の球，球面，円錐，円柱，楕円体などの体積の公式に現れる．三角関数は周期 2π の周期性を持つ．π は次の積分たちを用いて周期として表現できる：

$$\pi = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx\,dy = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad (1)$$

また，代数的数 $2i$ をかけると，線積分

$$2\pi i = \oint \frac{dz}{z}$$

で表すこともできる．積分は複素数平面内の $z=0$ の周りで行う．π の超越性はリンデマンが 1882 年に証明した．

その他の特別な記号を持つ二つの有名な数は自然対数の底

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.7182818\ldots$$

とオイラー定数

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right) = 0.5772156\ldots$$

である．しかしこの二つの数は周期ではない(と思われる)．(ただし，§4.3 を見よ.) e は超越数であることが分かっている(エルミート，1873)．

しかしながら，π や代数的数以外の周期の例も，たくさん存在する．例えば，**代数的数の対数**は周期である．例えば，

$$\log(2) = \int_1^2 \frac{dx}{x}\,.$$

同様に，長径と短径が a と b の楕円の周の長さは**楕円積分**

$$2\int_{-b}^{b}\sqrt{1+\frac{a^2x^2}{b^4-b^2x^2}}\,dx$$

で与えられるが，それは $a\neq b,\ a,b\in\mathbb{Q}_{>0}$ のとき π を用いて代数的に表すことはできない．多くの初等的な式の無限和も周期である．例えば，

$$\zeta(3) = 1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots = 1.2020569\ldots$$

は次のような積分としての表示を持つ：

$$\zeta(3) = \iiint_{0<x<y<z<1}\frac{dx\,dy\,dz}{(1-x)yz}\,. \qquad (2)$$

そしてより一般的に，**リーマンゼータ関数**

$$\zeta(s) := \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$$

の整数 $s\geq 2$ でのすべての値は周期になる．近年広く研究されている“多重ゼータ値”

$$\zeta(s_1,\ldots,s_k) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_k}\frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_k^{s_k}} \qquad (s_i\in\mathbb{N},\ s_k\geq 2) \qquad (3)$$

([32] を見よ)も同様である．**超幾何関数**や多くの他の微分方程式の解の代数的な変数での特殊値は，周期である(§2.2)．適当な場所での**保型形式**の特殊値も周期であり(§2.3)，それらに付随するさまざまな L **関数**の特殊値も周期である(第 3 章)． ローラン多項式 $P(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{Q}[x_1^{\pm 1},\ldots,x_n^{\pm 1}]$ の(対数的) **マーラー測度**

$$\mu(P) \;=\; \int\cdots\int_{|x_1|=\cdots=|x_n|=1} \log|P(x_1,\ldots,x_n)|\,\frac{dx_1}{x_1}\cdots\frac{dx_n}{x_n} \tag{4}$$

も周期である．また，周期は環をなすので，既知の二つの元から和や積をとることで新しい周期を得る．

超越的関数の積分が “偶然に” 周期になることもある．例として，読者は次を確かめてみられたい．

$$\int_0^1 \frac{x}{\log\frac{1}{1-x}}dx \;=\; \log 2\,. \tag{5}$$

(ヒント: 置換 $x \mapsto 2x - x^2$ を $\int_{2\varepsilon-\varepsilon^2}^1 (\log(1-x))^{-1}\,dx$ に用いよ.)　同様に，変数 s が有理数値のときのガンマ関数

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\,e^{-t}\,dt$$

の値は周期と密接に関係している．

$$\Gamma\big(p/q\big)^q \;\in\; \mathcal{P} \qquad (p,\,q \in \mathbb{N})\,. \tag{6}$$

(これはベータ積分を用いた $\Gamma(p/q)^q$ の表示から従う.)　例えば，$\Gamma(1/2)^2 = \pi$ であり $\Gamma(1/3)^3 = 2^{4/3}3^{1/2}\pi\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ である．一般に，無限和や超越的関数の積分が，周期かどうか説明する普遍的な方法はないように見える．そのたびごとに，与えられた超越的表示が，周期であることを証明する新しい方法を作らなければならない．

代数幾何学の大部分は(何らかの意味で)多変数の有理関数の積分の研究であると言って差しつかえない．それゆえ数学を実行するために次の原理を提案する．

■原理 1　新しい数と出会い，そしてそれが超越的であったなら(そう自分で確信したなら)，それが周期かどうかを計算してみようと試みよ．

1.2 周期間の等式

導入の中で，最もよく知られた数の類をいくつか挙げた．これらをまとめると表(0)のようになり，この表の二つの行には大きな違いがあった．すなわち，一行目の集合は可算であり，それらの元は有限の情報で述べることができた．それに対し，二行目の集合の元は一般にそのような記述はできない．実際，この理由のために，数学者の中にはこれらの集合は扱うに値しない，と言う人 [27] さえいる！ 周期に関してはこの状況はそれらの中間であり，完全に明瞭なわけでもない．一方では，集合 $\mathcal{P}$ は可算であり，その元は有限の情報(すなわち，周期を定義している被積分関数や積分領域のことである) で述べることができる．他方では，複素数を積分として表す方法は本来たくさんあり，そして，明示された積分で与えられる二つの周期が等しいか異なるかをどうやって調べるか，明瞭ではない．二つの異なる周期が数値的にとても近くなりうるという事実が問題を悪化させる．例として

$$\frac{\pi\sqrt{163}}{3} \quad \text{と} \quad \log(640320)$$

があり，両方とも小数に展開すると 13.36972333037750... となる．さらに驚くべきことに，二つの周期 [23]

$$\frac{\pi}{6}\sqrt{3502} \quad \text{と} \quad \log\left(2\prod_{j=1}^{4}\left(x_j+\sqrt{x_j^2-1}\right)\right)$$

$$\left(x_1=\frac{1071}{2}+92\sqrt{34},\quad x_2=\frac{1553}{2}+133\sqrt{34},\right.$$
$$\left. x_3=429+304\sqrt{2},\quad x_4=\frac{627}{2}+221\sqrt{2}\right)$$

は，数値的に小数点以下 80 ケタ以上一致するにもかかわらず異なるのである!

もちろん，代数的数に対してもまた，同じ数が一見異なる形をしていることがある．例えば

$$\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}} = \sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}$$

([22]) である．しかし，この等式は簡単に示すことができる．その方法とし

ては，それぞれの数を根とする多項式を見つけ，その最大公約多項式を計算するか，または，それぞれの数を数値的に十分に高い精度まで計算し，与えられた次数と高さを持つ整数係数代数方程式の二つの異なる解は，お互いにあまり接近できない，という事実を用いるかすればよい．

周期に対しても何か似たようなことはできないのだろうか？ 初等的な解析からいくつかの変換法則，すなわち，積分間の等式を証明する方法，を得る．一変数関数の積分に対して，そうした変換法則は次のようである．

1）加法性（被積分関数や積分区間に対して）:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;+\; \int_a^b g(x)\,dx\,,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

2）変数変換: $y=f(x)$ を可逆な変数変換とすれば，

$$\int_{f(a)}^{f(b)} F(y)\,dy = \int_a^b F(f(x))\,f'(x)\,dx\,.$$

3）ニュートン・ライプニッツの公式:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)\,.$$

高次元の積分の場合，法則 **2**）では可逆な座標変換のヤコビアンを用いて，**3**）では，ニュートン・ライプニッツの公式の代わりにストークスの公式を用いる．

経験や類推，そして，希望的観測の賢明な組み合わせに基づいて次のことがらが広く信じられている．

■**予想 1** ある周期が二つの積分表示を持つならば，関数や積分領域が $\overline{\mathbb{Q}}$ 係数で代数的である場合の法則 **1**)，**2**)，**3**) のみで一方から他方へ変形できる．

言い換えると，三つの単純な法則を用いて証明できない二つの代数的関数の積分の奇蹟的な一致はないだろうということである．このホッジ予想に類似する予想は，代数的独立性や超越数についての主要な予想の一つであり，現

代の数論的代数幾何の結果や考え，そして，モチーフ理論の多くに関係している．

予想 1 は §1 の最後に述べた原理に次のように付け加えると有用であることを示唆する．

■原理 2 二つの実数が一致すると予想し，それを証明したいなら，まず，それらを周期として表そうと試みよ（原理 1）．そして，法則 **1**）– **3**）によって一方を他方に変形しようと試みよ．

この原理の最初の部分が適合するとき，すなわち，二つの周期間の等式を証明するためにすでに積分表示ができていて，“単に” 予想 1 の部分を証明すればよいとき，**接近可能等式**と呼ぼう． この節の最後に簡単な例を一つ与え，後にいくつか別の例を挙げる．

この節の最初に議論した問題に戻ることにして，次を提案しよう．

■問題 1 二つの与えられた $\mathcal{P}$ の元が等しいかどうかを決定するアルゴリズムを見つけよ．

予想 1 が証明できたとしても，すぐにこの問題を解決するわけではないことに注意しよう．なぜなら，予想 1 は周期間の任意の等式は初等的な証明をもつことのみを言っていて，それを見つける方法は与えないであろうから．それゆえ，問題 1 は現在のところ全く手のつけられない問題であり，今後も長い間そうであろう．それでも，もっと尋ねることができる．有理数や代数的数の類に対しては，すでに述べたように，その類の与えられた二つの元が等しいかどうか調べることができるだけでなく，数値的にだけ分かっている与えられた数が，その類に属するか否かアルゴリズム的に調べることができる．（与えられた実数 ξ が数値的に有理数かどうか見分けるためには，それの連分数展開を計算し極めて大きな部分商を持つかどうかを調べる．あまり大きくない整数係数の n 次多項式の根になっているかどうかを調べるためには，次のようなアルゴリズムを用いる．それは，十分小さい正数 ε に対し，ベクトル $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ で二次形式 $(a_n\xi^n + \cdots + a_1\xi + a_0)^2 + \varepsilon(a_0^2 + \cdots + a_n^2)$ を十分小さくするものが存在するか否か決定するための “LLL” のような，ある格子還元アルゴリズムである．） これとの類推によって，たぶん途方もなく難しい問題を

提案できる．

■問題 2　数値的に十分精密に分かっている実数が，ある簡単な周期に(その精密さの範囲内で)等しいかどうか決定するアルゴリズムを見つけよ．

ここでの“簡単さ”は — 代数的数の場合の高さの類似であるが — その周期を定義している積分の次元や，被積分関数や積分領域に現れる多項式の複雑さによって決められるべきである．(または，もし望むなら，単に積分を書き出すために必要なインクの量や TEX のキーを打つ回数によって決める.)

最後に，ある意味で問題 2 と逆である問題を述べよう．

■問題 3　$\mathcal{P}$に属さない数を一つでもいいから例示せよ．

$\mathcal{P}$は可算なので，もちろんそのような数は存在する．問題 3 を解くことは 19 世紀のリュービルの仕事の類似である．彼はそのとき超越的な数の最初の明白な例を構成した．もちろんよりいっそう望ましいことは，エルミートやリンデマンの成果を習い特別の興味深いいくつかの数，e や $1/\pi$ のようなもの，が$\mathcal{P}$に属さないことを証明することである．

これらの問題はいずれもとても難しく思われ長い間解決されないであろう．原理 2 から得られる状況の簡単な例，すなわち，1734 年にオイラーが示した公式 $\zeta(2) = \pi^2/6$ を与えることにより楽観的にこの節を終えよう．$\zeta(2)$ (等式(2)を参照せよ)と π は共に周期であるので，これは一つの“接近可能等式”である．ここでは(わずかに異なる積分表示から始め)それを証明する．そのために，法則 **1**) – **3**)のみを用いることによるカラビの証明を書き直した論文 [5] を再現しよう．

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} \frac{dx\,dy}{\sqrt{xy}}$$

とおく．$1/(1-xy)$ を幾何級数として展開し，項別積分をすると，$I = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{-2} = (4-1)\zeta(2)$ を得，これは $\zeta(2)$ のもう一つの“周期としての”表現を与える．いま，変数変換

$$x = \xi^2 \frac{1+\eta^2}{1+\xi^2}, \qquad y = \eta^2 \frac{1+\xi^2}{1+\eta^2}$$

をする．このとき，ヤコビアンは

$$\left|\frac{d(x,y)}{d(\xi,\eta)}\right| = \frac{4\xi\eta(1-\xi^2\eta^2)}{(1+\xi^2)(1+\eta^2)} = 4\,\frac{(1-xy)\sqrt{xy}}{(1+\xi^2)(1+\eta^2)}$$

であり,

$$I = 4 \iint_{\xi,\,\eta>0,\ \xi\,\eta\leq 1} \frac{d\xi}{1+\xi^2}\,\frac{d\eta}{1+\eta^2} = 2\int_0^\infty \frac{d\xi}{1+\xi^2}\int_0^\infty \frac{d\eta}{1+\eta^2}$$

を得る．最後の等式は変換 $(\xi,\eta)\mapsto(\xi^{-1},\eta^{-1})$ を考えることにより得られ，これと(1)の最後の積分を比較することにより $I=\pi^2/2$ を得る．

異なる例として，次の接近可能等式を法則 **1)** – **3)** のみを用いて証明してみるとよい．

$$\mu\big(x+y+16+1/x+1/y\big) = \frac{11}{6}\,\mu\big(x+y+5+1/x+1/y\big).$$

ここで $\mu(P)$ は §1.1 で定義した(対数的)マーラー測度である．

2　周期と微分方程式

定義より，周期は代数的に定義された微分形式を代数多様体のあるチェイン上で積分した値である．もしその形式やチェインがパラメーター付きなら，積分はパラメーターの関数として考えたときに，代数的な係数を持つ線型微分方程式を満足することがよくある．このとき周期は変数の代数的値におけるその微分方程式の解の特殊値と思える．これは周期の研究と線型微分方程式の理論の間に魅力的な，そして，たいへん実り多い相互作用を導く．ここではこの大きな主題を扱うことはとてもできない．そこでいくつかの一般的な性質や例を与えるのみとする．より詳しくは広範囲を扱う文献，例えば [1], を参照されたい．

今示した筋道に現れる微分方程式は(一般化された)ピカール・フックス型微分方程式またはガウス・マニン系(の元)とよぶ．強調すべき第一の点はこの微分方程式は非常に特別なものであり，一般に与えられた($\mathbb{Q}[t]$ 係数の)線型微分方程式がピカール・フックス型かどうかを決定する方法は知られていないということである．予想される判定法ならいくつかある．ここでは言葉の定義なしに，簡潔に三つの判定法を述べる．一つ目は，ボンビエリとドヴァークによるもので，選んだ(有理数の)基点 t_0 におけるすべての解のベキ

級数展開が分子分母が高々指数的な増大度の係数を持つ(いわゆる "G-関数" である)ような方程式であるというものである．もう一つ(ジーゲル，ボンビエリ，ドヴァーク)は，その微分作用素がほとんどすべての素数 p に対し，ベキ零な p-曲率を持つという必要十分条件として与えられる．三つ目は，この微分方程式は確定特異点のみを持ち，また，$SL(n,\overline{\mathbb{Q}})$ に含まれるモロドロミー群を持つべきであるというものである．ここで n は方程式の階数とする．しかし，これらの判定法は証明されてないだけでなく，与えられた微分方程式に対し，これらが成り立つかどうか決定するための一般的なアルゴリズムが存在するかどうかも明らかではない．

ここでピカール・フックス型方程式の例と周期との関係をいくつか挙げよう．

2.1 例 1: 楕円曲線族

これは上で述べた状況の，最も簡単で古典的な例である．E を $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線，すなわち $f(x)$ を三次式とするとき $y^2 = f(x)$ という方程式で与えられるものとすると，$E(\mathbb{C})$ 内の閉曲線上の正則 1-形式 dx/y の積分はその閉曲線のホモロジー類のみで決まるから，$H_1(E(\mathbb{C});\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$ の基底を選ぶことによって二つの基本的な周期積分を得る．$f(x)$ が有理的にパラメーター t に依存するなら，それらは $SL(2,\mathbb{Z})$ に含まれるモロドロミー群を持つ二階の微分方程式の解になる．例えば，ワイエルシュトラス族

$$E_t^W \ : \qquad y^2 \ = \ x^3 - 3tx + 2t \qquad (t \in \mathbb{C})$$

に対し，この周期積分は微分方程式

$$t^2(t-1)\,W''(t) \ + \ t(2t-1)\,W'(t) \ + \ \left(\frac{3t}{16} + \frac{1}{36}\right) W(t) \ = \ 0$$

をみたす．もう一つのたびたび出会う族はルジャンドルの方程式

$$E_t^L \ : \qquad y^2 \ = \ x(x-1)(x-t) \qquad (t \in \mathbb{C}) \tag{7}$$

によって与えられる．その周期積分

$$\Omega_1(t) = \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}}, \quad \Omega_2(t) = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}} \tag{8}$$

は微分方程式

$$t(t-1)\,\Omega''(t) \;+\; (2t-1)\,\Omega'(t) \;+\; \frac{1}{4}\,\Omega(t) \;=\; 0$$

の解である．三つ目の例は位数 2 の点 $(0,0)$ を持つ楕円曲線の族

$$E_t^P \;:\qquad y^2 \;=\; x^3 - 2x^2 + (1-t)x \qquad (t \in \mathbb{C})$$

であり，その周期積分は

$$P_1(t) = \int_0^{1-\sqrt{t}} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 2x^2 + (1-t)x}}, \quad P_2(t) = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 2x^2 + (1-t)x}}$$

で与えられ，微分方程式

$$t(t-1)\,P''(t) + (2t-1)\,P'(t) + \frac{3}{16}\,P(t) \;=\; 0$$

をみたす．

2.2 例 2: 超幾何関数

オイラー・ガウスの超幾何関数

$$F(a,b;\,c;\,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!}\,x^n \quad \left(\,|x|<1,\ (\alpha)_n := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\,\right)$$

をみたす微分方程式はパラメーター a，b，c が有理数のときピカール・フックス型になる．先ほど与えた三つの微分方程式の後ろの二つはこの型である．例えば，$P_2(t)$ の定義式に $x = -\cot^2\theta$ を代入し，二項定理を用いて展開すると

$$\begin{aligned} P_2(t) \;&=\; 2i\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-t\sin^4\theta}} = 2i\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{t^n}{4^n}\int_0^{\pi/2}\sin^{4n}\theta\,d\theta \\ &=\; \pi i\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\binom{4n}{2n}\frac{t^n}{64^n} \;=\; \pi i\,F\left(\tfrac{1}{4},\,\tfrac{3}{4};\,1;\,t\right) \qquad (|t|<1) \end{aligned}$$

を得る．また同様に $\Omega_2(t) = \pi F(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;t)$ となる．

したがって，これらの例では，代数的変数における超幾何関数の値は周期

の $1/\pi$ 倍となっている．a，b，c を任意の有理数としたとき $F(a,b;c;x)$ に対しても同様のことが言える．これを見るためには，オイラーの積分表示

$$F(a,b;\,c;\,x) \;=\; \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}\,(1-t)^{c-a-1}\,(1-xt)^{-b}\,dt$$

から始め，相補公式 $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\pi/\sin\pi x$ とベータ積分を用いて

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{a\sin(\pi a)\sin(\pi(a-c))}{\sin(\pi c)}\cdot\int_0^1 t^{-a-1}(1-t)^{a-c}\,dt \in \frac{1}{\pi}\mathcal{P}$$

とすればよい．(別証明は，関数 $(c-1)(1-xz)^{-a}\int_0^1(1-t/z)^{-b}(1-t)^{c-2}dt$ の $z=0$ における留数として $F(a,b;c;x)$ を表し，その留数をコーシー積分として表示すると分母に $2\pi i$ が現れることから得られる.)　また，$F(\frac{1}{2},\frac{1}{2};2;1)=4\pi^{-1}$ が $\pi^{-1}\mathcal{P}$ に属するが，(おそらく) $\mathcal{P}$ には属さないことに見られるように，因子 $1/\pi$ は実際に必要である．一般化された超幾何関数に対してもまた同様のことが言える．多くの目的のためには以前の定義を広げ**拡大周期環** $\widehat{\mathcal{P}}=\mathcal{P}\,[1/\pi]$ $(=\mathcal{P}\,[1/2\pi i])$ の元を考えると便利である．モチーフ的視点(第4章を参照せよ)からすると，とにかく $\mathcal{P}$ より $\widehat{\mathcal{P}}$ を考えることが自然である．なぜなら $2\pi i$ のベキをかけることは，対応するモチーフの“テイトひねり”を行うことに対応していて，そのようなひねりは基本的なずらしと考えることができるからである．

変数の代数的値における超幾何関数の特殊値はふつう超越的であるが，時々，予期されない代数的値をとることがある．例えば [7] による

$$F\left(\frac{1}{12},\frac{5}{12};\frac{1}{2};\frac{1323}{1331}\right) \;=\; \frac{3}{4}\sqrt[4]{11}$$

である．この例をより驚くべきものにするのは，その超幾何級数が $(1323=3^3 7^2$ なので) 7 進数体の中でもまた収束し，その値が $\frac{1}{4}\sqrt[4]{11}$ となっていることである [4]！(似たようなふるまいをする簡単な例は，超幾何級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!^2\,3^n}{(2n+1)!}$$

で与えられ，これは $\mathbb{R}$ 内では $4\pi/3\sqrt{3}$ に，$\mathbb{Q}_3$ 内では 0 に収束する [31].)
同様に，超幾何関数はふつう超越的な関数であるが，時々代数的になることがある．古典的なガウスの超幾何関数 $F={}_2F_1$ に対してこれがおこる状況

は 1873 年にシュワルツにより決定された．そして，一般化された超幾何関数 ${}_nF_{n-1}$ に対しての対応する値もボイカースとヘックマンにより決定された [6]．例としては次の三つの関数

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(6n)!n!}{(3n)!(2n)!^2}\,x^n\,,\quad B=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(10n)!n!}{(5n)!(4n)!(2n)!}\,x^n\,,$$

$$C=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(20n)!n!}{(10n)!(7n)!(4n)!}\,x^n$$

がある．これらは代数的である．しかし，対応する方程式はかなり複雑である．例えば，B がみたす方程式は $\varPhi(1-3125x,\,B^2)=0$ である．ここで $\varPhi(X,Y)$ は $X^{12}Y^{15}+\frac{15}{4}X^{11}Y^{14}+\frac{3}{128}(15X^{11}+266X^{10})Y^{13}+\cdots$ となる多項式である．

2.3　例 3: 保型形式

保型形式はこの論文の中の残りの例の多くで重要な役割を果たす．定義を思い出そう．$k\in\mathbb{Z}$ に対し，重さ k の保型形式とは，複素上半平面 $\mathfrak{H}=\{z\in\mathbb{C}\mid\Im(z)>0\}$ 上定義された関数 f で $SL(2,\mathbb{Z})$ や $SL(2,\mathbb{Z})$ の指数有限の部分群 $\varGamma$ に属するすべての行列 $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ の作用のもと $f((az+b)/(cz+d))=(cz+d)^kf(z)$ の式に従って変換されるものである．また，適当な正則性や有理型性条件，そして，無限大における増大条件をみたすと仮定する．保型関数とは重さ 0 の保型形式のことである．すなわち，$\mathfrak{H}$ 上正則または有理型な関数で $\varGamma$ の作用のもと不変なものである．19 世紀の終りから分かっているのに，その分野の驚くほど多くの専門家達にさえよく知られていない基本的な原理は次のとおり．

■事実 1　$f(z)$ を重さ $k>0$ の（正則または有理型）保型形式とし，$t(z)$ を保型関数とする．そのとき，$F(t(z))=f(z)$ により定義された多価関数 $F(t)$ は代数的係数を持つ $k+1$ 階線型微分方程式をみたす．

ここでは短い証明を与える．i についての帰納法により簡単に次が分かる．$D=t'(z)^{-1}d/dz$（“$=d/dt$”）とし，$\vec{f}:\mathfrak{H}\to\mathbb{C}^{k+1}$ を，成分 $z^nf(z)$ $(n=$

$k, k-1, \ldots, 0$）を持つベクトル値関数とするとき，任意の $i \geq 0$ に対して，元 $\gamma \in \Gamma$ の $D^i\vec{f}(z)$ への（重さ 0 での）作用は定数行列 $\mathrm{Sym}^k(\gamma)$ となる．よって，$k+2$ 個のベクトル $D^i\vec{f}$（$i = 0, 1, \ldots, k+1$）間の線型関係の係数は Γ-不変な z の関数であり，ゆえに，$t = t(z)$ の代数的関数であることが分かる．これが欲しかった微分方程式である．また，この微分方程式の解全体が関数 $z^n f(z)$（$0 \leq n \leq k$）で張られる空間となること，そして，モノドロミー群が k 次対称テンソル表現 $SL(2,\mathbb{R}) \to SL(k+1,\mathbb{R})$ における $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{R})$ の像であることが分かる．

このことを説明しているいくつかの例を与え，特殊値に対応する命題や §2.1 で考察した楕円積分との関係を述べよう．

モジュラー群 $SL(2,\mathbb{Z})$ 上の最も単純な保型形式は重さ k の**アイゼンシュタイン級数**

$$E_k(z) \;=\; \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z} \\ m,n\ \text{互いに素}}} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

である．ここで k は整数 $4, 6, \ldots$ である（$k > 2$ はこの級数を収束させるために，k が偶数であることは 0 にさせないために必要である）．保型性の定義は周期性 $f(z) = f(z+1)$ を含むので，任意の保型形式は $q = e^{2\pi iz}$ のベキ級数としてフーリエ展開を持つ．最初の二つのアイゼンシュタイン級数に対して，そのフーリエ展開は

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)\, q^n\,, \qquad E_6(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n)\, q^n$$

となる．ここで $\sigma_\nu(n)$ は n の正の約数の ν 乗の和を表す．（同様の式がすべての E_k に対し存在する.）　もう一つの有名な保型形式は重さ 12 の判別関数

$$\Delta(z) = \frac{1}{1728}\bigl(E_4(z)^3 - E_6(z)^2\bigr) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24} = q - 24q^2 + 252q^3 - \cdots$$

である．そのフーリエ展開 $\sum \tau(n) q^n$ は，フーリエ係数が n に関して乗法的であるという驚くべき性質を持っている（例えば，$\tau(6) = -6048 = \tau(2)\tau(3)$）．この性質を持つ保型形式は，**ヘッケ固有形式**と呼ばれるものであるが，保型形式全体の空間を張ることが知られており，そして，第 3 章で論じる L-関数

についての予想で重要になる．最後に，最も簡単でよく知られている保型関数の例として j-関数 $j(z)=E_4(z)^3/\Delta(z)=q^{-1}+744+196884q+\cdots$ がある．いま，$f(z)=\sqrt[4]{E_4(z)}$（これは多価であり，ゆえに真の保型形式ではないが，事実 1 はまだ適合する）と $t(z)=1728/j(z)$ とおくと，そのとき事実 1 で決まる $F(t)$ は 19 世紀から 20 世紀への変わり目にフリッケとクラインにより与えられたように超幾何関数

$$\sqrt[4]{E_4(z)} \;=\; F\left(\frac{1}{12},\frac{5}{12};1;\frac{1728}{j(z)}\right)$$

である．

二つ目の例として，法 2 で単位行列と合同な行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in SL(2,\mathbb{Z})$ からなる部分群 $\Gamma(2)$ を考える．ここでは $f(z)$ として重さ 1 の保型形式 $\theta(z)^2$ をとることができる．ここで

$$\theta(z) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z} \;=\; 1+2q^{1/2}+2q^2+2q^{9/2}+\cdots$$

は古典的なテータ関数である．（これの保型性はポアソンの和公式からの帰結である.） また $t(z)$ として λ-関数，

$$\begin{aligned}\lambda(z) \;&=\; 16\frac{\eta(z/2)^8\eta(2z)^{16}}{\eta(z)^{24}}=1-\frac{\eta(z/2)^{16}\eta(2z)^8}{\eta(z)^{24}}\\ &=\; 16q^{1/2}-128q+704q^{3/2}-\cdots\end{aligned}$$

をとることができる．ここで $\eta(z)=\Delta(z)^{1/24}=q^{1/24}\prod(1-q^n)$ はデデキントのイータ関数である．そのとき，事実 1 のもう一つの例として $f(z)=F(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;\lambda(z))$ が分かる．

注意深い読者なら $\theta(z)^2$ を $\lambda(t)$ に関連付ける超幾何関数 $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;t)$ は §2.2 で述べた $\pi^{-1}\Omega_2(t)$ の $t=0$ の近傍におけるベキ級数展開で与えられるものと同じものであることに気付くであろう．ここで $\Omega_2(t)$ は (8) で定義された楕円積分である．これは偶然の一致ではない．任意の $z\in\mathfrak{H}$ と楕円曲線 $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}z+\mathbb{Z})$ は同一視することができる．$SL(2,\mathbb{Z})$ の作用で同値な二つの z の値は同型な楕円曲線を与える．よって，楕円曲線の任意の不変量は自動的に保型関数となる．(7) により与えられた楕円曲線の “t” は，その楕円曲線の不変量とは言えない．なぜなら，この曲線に対するワイエルシュトラス方

程式に現れる三次式の根の順序によるからである．しかし，それは $SL(2,\mathbb{Z})$ の指数 6 の部分群 $\Gamma(2)$ に対する保型関数にはなっており，よって $\lambda(z)$ に他ならない．これは $\Omega_1(t)$ と $\Omega_2(t)$ により生成される格子が z と 1 により生成される格子に相似(すなわち，定数倍を除いて等しい) であることを導く．$z=\Omega_1(t)/\Omega_2(t)$ として格子の基底を選ぶと，モジュラー群の下での変換の性質から，$\Omega_2(\lambda(z))$ が重さ 1 の保型形式であり，実際には，それが $\pi\theta(z)^2$ であることがわかる．同様のことが任意の他の楕円曲線の族に対しても適合する．例えば，§2.1 の族 E_t^P は $t=64\Delta(2z)/(\Delta(z)+64\Delta(2z))$ および，$SL(2,\mathbb{Z})$ の元 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ で c が偶数のものからなる部分群 $\Gamma_0(2)$ 上の重さ 2 のアイゼンシュタイン級数の平方根 $P_2(t)$ というモジュラーパラメーター表示を持つ．読者は演習として，族 E_t^W のモジュラーパラメーター表示を見つけよ．

事実 1 は関数レベルのことを述べていた．特殊値レベルのことについても類似の事実がある．それを述べるために，さらに定義が必要である．保型形式や保型関数が $\mathbb{C}$ の部分体 K 上定義されているとは，そのフーリエ係数がすべて K に属することを言う．このとき次を得る．

■**事実 2**　$f(z)$ を重さ $k>0$ の保型形式，$t(z)$ を保型関数とし，共に $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義されているとする．そのとき，$t(z_0)$ が代数的になる任意の $z_0\in\mathfrak{H}$ に対し，$f(z_0)$ は $\widehat{\mathcal{P}}$ に属す．

実際，$\pi^k f(z_0)$ は $\mathcal{P}$ に属する．この段階での証明は以下のように自明である．重さ 1 の保型形式 $f_1(z)$，例えば $\theta(z)^2$，を選ぶ．また保型関数 $t_1(z)$，例えば $\lambda(z)$，を選ぶ．これらがこの主張をみたすことはすでに知っている(この場合，$t_0=\lambda(z_0)$ が代数的なら，そのとき $\pi f_1(z_0)$ は周期 $\Omega_2(t_0)$ に等しいからである)．任意の二つの保型関数は代数的に従属なので，$f(z)/f_1(z)^k$ と $t_1(z)$ は $t(z)$ の代数的関数であり，f，t，f_1 そして t_1 がすべて $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義されていることから，この代数的従属性の係数はすべて $\overline{\mathbb{Q}}$ に属することが分かる．ゆえに $f(z_0)/f_1(z_0)^k$ と $t_1(z_0)$ は $\overline{\mathbb{Q}}$ に属し，したがって，$\pi f_1(z_0)$ と $\pi^k f(z_0)$ は $\mathcal{P}$ に属する．同様の論法は事実 1 の別証明を与えるために使うことができる．まず，θ^2 と λ の場合に §2.2 で証明したように，一つの組(f_1, t_1)に対しては確認できている．したがって，$F_1(t)$ が代数的係数の二階線型微分方程式をみたすなら，$F_1(t)^k$ は代数的係数の $k+1$ 階微分方程式をみた

すことや，後者の性質は t を t の代数的関数に置き換えても，関数 $F_1(t)^k$ に t の代数的関数をかけても変化しないことを観察することにより，一般の場合が従う．

事実 2 のある特別な場合は注意しておく価値がある．点 $z_0 \in \mathfrak{H}$ が **CM（虚数乗法）点**であるとは，それが $\mathbb{Q}$ 係数の二次方程式の解になっていることである．（これは対応する楕円曲線 $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}z_0 + \mathbb{Z})$ が，ある複素数，すなわち，虚二次体 $\mathbb{Q}(z_0)$ のある整環の元，をかけることにより与えられる非自明な自己準同型を持つということである.） この場合，虚数乗法の理論によって $j(z_0)$ が代数的であることが知られている．したがって，$\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された任意の保型関数 t に対し $t(z_0)$ が代数的である．よって事実 2 は，任意の $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された（正の）重さ k の保型形式 f に対し，$\pi^k f(z_0)$ は周期になることを言っている．この場合，この周期の値に対し明示公式（すなわち，チャウラ・セルバーグの公式，[26] を参照）がある．これは周期を代数的数と π のベキを除いて，有理数変数におけるガンマ関数の値の有理数ベキの積として表すというものである．例えば，$\Delta(i) = 2^{-24}\pi^{-18}\Gamma(1/4)^{24}$. [訳注:「レルヒの公式」と呼ぶのが正確である.]

2.4 例 4: アペリの微分方程式

1986 年に，アペリは $\zeta(3) = 1 + 2^{-3} + 3^{-3} + \cdots$ の無理数性を証明することによりセンセーションを引き起こした．より正確には，彼が行ったのは二つの数列

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = 73, \quad a_3 = 1445, \quad a_4 = 33001, \ \ldots$$

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 6, \quad b_2 = \frac{351}{4}, \quad b_3 = \frac{62531}{36}, \quad b_4 = \frac{11424695}{288}, \ \ldots$$

を構成したことである．これらは次の性質を持っている．

(i) すべての $n \geq 0$ に対し，$a_n \in \mathbb{Z}$, $N_n^3 b_n \in \mathbb{Z}$ である．ただし $N_n = \mathrm{l.c.m.}\{1, 2, \ldots, n\}$.

(ii) ある $A > 0$ とすべての $n \geq 0$ に対し，$0 < a_n\zeta(3) - b_n < A\alpha^{-n}$. ただし $\alpha = 17+12\sqrt{2}$.

N_n^3 は e^{3n} 程度で増大(素数定理より)し，$\alpha > e^3$ なので，これら二つの主張から $\zeta(3)$ が有理数でないことがすぐに導かれる．アペリは主張(i)を自明にみたす二項係数による明示式(例えば，$a_n = \sum_k \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$．$b_n$ に対する式も同様であるがより複雑である)によって，数 a_n と b_n を与えた．そのとき彼はこの二つの数列が漸化式

$$(n+1)^3 u_{n+1} = (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)\, u_n - n^3\, u_{n-1} \quad (n \geq 1) \tag{9}$$

をみたすことを証明した．主張(ii)はこれから簡単に導かれる．((9)の任意の解は $C\alpha^{\pm n}/n^{3/2}$ 程度で指数的に増大，または減少しなければならない．そして，明示式は $b_n/a_n \to \zeta(3)$ を示している．)　しかし，明示式により定義された数列が漸化式(9)をみたすことの証明は複雑でわかりにくいものだった．程なく，ボイカースは，今論じている考えの流れに沿ってはいるが，よりはっきりとした証明を二つ見つけた．

第一の証明は，直に周期積分と§1.2で述べた原理を用いることを土台としている．$n \geq 0$ に対し

$$I_n \;=\; \frac{1}{2} \int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{p_n(x)p_n(y)}{1-t+txy}\, dx\, dy\, dt$$

とおく．ただし $p_n(x) = (d/dx)^n (x^n(1-x)^n)/n!$ (本質的には n 次ルジャンドル多項式)とする．0 から n の間の整数 k と l に対し，直接的な(しかし，上手な)計算によって $\frac{1}{2}\iiint x^k y^l (1-t+txy)^{-1}\, dx\, dy\, dt$ が $\delta_{k,l}\zeta(3)$ と分母が N_n^3 の約数である有理数との和になることがわかる．よって，p_n は整数係数であるので，I_n は性質(i)をみたす a_n と b_n を用いて，$a_n\zeta(3) - b_n$ の形をしていることになる．一方，§1.2のように計算の法則を適用して(明確には，x に関して n 回部分積分をし，それから適当な変数変換をした後，y に関して n 回積分する)，

$$2I_n \;=\; \int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1 \left[\frac{xyz(1-x)(1-y)(1-z)}{1-(1-xy)z}\right]^n \frac{dx\, dy\, dz}{1-(1-xy)z}$$

を得る．そして(ii)の下での評価 $I_n = \mathrm{O}(\alpha^{-n})$ は，括弧中の式の最大値が $1/\alpha$ であることから導かれる．

より良い第二の証明は，数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に保型形式的解釈を与えることを土台とする．ここでは，$\{a_n\}$ に関してどうなるかだけを述べる．これは §2.3 の "事実 1" の直接の適用例となる．いま，

$$t(z) \;=\; \left(\frac{\eta(z)\,\eta(6z)}{\eta(2z)\,\eta(3z)}\right)^{12} \;=\; q - 12q^2 + 66q^3 - 220q^4 + \cdots$$

$(\eta(z) \;=$ デデキントのイータ関数$)$と

$$f(z) \;=\; \frac{\bigl(\eta(2z)\,\eta(3z)\bigr)^7}{\bigl(\eta(z)\,\eta(6z)\bigr)^5} \;=\; 1 + 5q + 13q^2 + 23q^3 + 29q^4 + \cdots$$

とおく．これらはそれぞれ，c が 6 で割れる $SL(2,\mathbb{Z})$ のすべての行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ からなる群 $\Gamma_0(6)$ 上の（実際は $\Gamma_0(6)$ に行列 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ を付け加えて得られるわずかに大きい群 $\Gamma_0^*(6)$ 上の）保型関数と重さ 2 の保型形式となる．そのとき事実 1 が述べていることは，$f(z)$ を（$z = i\infty$ の近くで）$t(z)$ により表現するベキ級数 $F(t) = 1 + 5t + 73t^2 + \cdots$ は階数が $2 + 1 = 3$ の（この場合）多項式係数を持つ線型微分方程式をみたすことである．この微分方程式を明確に計算すると，$F(t)$ の係数が漸化式(9)をみたすことが分かる．そして $f(z)$ と $t(z)$ が整数係数の q-展開を持つことからそれらの整数性は明らかである．

第二の証明はこの章の始めに述べたピカール・フックス型方程式の側面を，この微分方程式の類の（推測による）特徴づけ，すなわち，高々指数的に増大する（分子と）分母のテイラー係数を持つという "G-関数" の性質，として目立たせる．漸化式(9)は明らかに $\mathbb{Q}$ 上線型独立な二つの解を持つ（$\mathbb{Q}$ 内で u_0 と u_1 の任意の初期値を取りそこから続ける）．しかし，前の二項から u_{n+1} を計算するときに，$(n+1)^3$ で割らなければならないので，それらが共に $n!^3$ くらい，すなわち，指数増大度より急激に増大する分母（ゆえにまた分子）を持つことが推測される．この，実際はどちらの解も共に高々 N_n^3 の（指数的に増大するだけの）分母を持ち，一つの解 $\{a_n\}$ が全く分母を持たない（つまり整数になる）ことさえあるというアペリにより見つけられた性質は驚くべきものであり，アペリの証明の核心である．この型の性質は非常に珍しい．例えば，著者の一人は漸化式

$$u_0 = 1, \qquad (n+1)^2 u_{n+1} - An(n+1)u_n + Bn^2 u_{n-1} = \lambda u_n \qquad (n \geq 0)$$

を 10^8 個以上のパラメーターの組 (A, B, λ) $(B(A^2-4B) \neq 0)$ について調べてみたが($(A, B, \lambda) = (11, -1, 3)$ の場合は $\zeta(3)$ の証明とちょうど同じような $\zeta(2)$ の無理性の証明に現れる漸化式である), u_n が整数になるのは 6 通りのみだった．予想されている特徴付けと合致し，この 6 個は，実際にすべてピカール・フックス型であり，そして，事実，§2.1 の楕円曲線の族に関連している．

アペリの証明に関連する最後の注意として，無理数性や超越性のほとんどすべての証明とは言わないまでも，多くの結果は周期やそれに関連する微分方程式を何らかの形で用いていることを述べておこう．顕著な例として，1983 年のヴュストホルツの定理(先行する超越性のいくつかの結果を特別な場合として含んでいる) を挙げておく．それはリーマン面上の任意の有理型 1 形式の任意の閉サイクル上の積分は 0 か，さもなければ超越数になるというものである．(ただし，リーマン面も有理型 1 形式もともに $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義されているとする.) また，もう一つの例として，π，e^{π} そして $\Gamma(1/4)$ が代数的に独立であるというより最近のネステレンコの定理がある．その証明の本質は保型形式の特殊値を周期積分として表すことである．

2.5 応用

§1.2 で定式化した原理(まず，周期間の等式として “接近可能” な形にそれを書き直し，それから，そのような積分の変換法則を適用することにより等式を証明すること) が，ピカール・フックス型方程式をみたす関数の段階で適用できること(まず，それを微分方程式を満足する関数の値間の等式として書き，それから，共に同じ境界条件を持つ同じ方程式をみたすことを示すことによって等式を証明する)を実証する簡単な例によりこの章を終える．都合のよい場合，すなわち，余分に変数を取ったことによる自由度が単に変数の固定された値を見る場合には証明がより簡単になる．考える例は和(3)のある特殊値についての公式

$$\zeta(\underbrace{1, 3, 1, 3, \ldots, 1, 3}_{2m\ \text{個}}) = \frac{2\,\pi^{4m}}{(4m+2)!} \qquad (m \geq 1)$$

である．この等式は，[32] の中で予想されたものであるが，接近可能であることがわかる．なぜなら，多重ゼータ値と π のベキは共に周期であるから．しかし，§1.2 で与えられた変換法則を適用することによってこれを示すことは全く明らかではなく，数年間は未解決のままであった．それはその後ブロードハーストにより証明された．その方法は，わかりやすくすると次のようになる．まず，$|x| \leq 1$ と任意の t に対し，

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{0<a_1<b_1<\cdots<a_m<b_m}\frac{(-4t^4)^m\, x^{b_m}}{a_1 b_1^3\cdots a_m b_m^3} \;=\; F(t,-t;1;x)\,F(it,-it;1;x)$$

が成り立つ．なぜなら，両辺は $1+\mathrm{O}(x^2)$ で始まる x のベキ級数であり，微分作用素 $\left((1-x)\,\dfrac{d}{dx}\right)^2\left(x\,\dfrac{d}{dx}\right)^2+4t^4$ を施すと 0 になるからである．そこで，$x=1$ とおき，$F(a,b,c)$ に対するガウスの公式を用いると，

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}\zeta(\underbrace{1,3,1,3,\ldots,1,3}_{2m\ \text{個}})\,(-4t^4)^m$$
$$=\frac{\sin\pi t}{\pi t}\,\frac{\sinh\pi t}{\pi t}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2\,\pi^{4m}}{(4m+2)!}\,(-4t^4)^m$$

が得られる．

3 周期と L-関数

数論に周期が現れる最も顕著な方面は L-関数の特殊値との関連である．この関連は，まだほとんどが予想であるが，最近数十年の数論と数論的代数幾何の統一テーマの一つであり，これからもずっとそうあり続けるであろう．この章ではそれをある程度詳細に議論したい．この章の最初の二つの節で，数論に現れる L-関数やそれらのある場所における特殊値と周期の予想されている関係の概説を与える．続く三つの節で代数的整数論や保型形式の理論から来る多くの例を述べる．§3.6 ではバーチ・スウィンナートンダイヤー予想についてかなり詳しく議論し，そして，それが $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の L-級数の導関数に対して与える予想式の “右辺” が，どうしてこの曲線の周期積分で書けるのかを説明する．最後の節では，L-関数のテイラー展開の最初の係数に

ついての予想を特殊点におけるテイラー展開の第二項についての陳述に拡張したコルメッツによる予想について述べる．

3.1　L-関数

前世紀の最も重要で不思議な発見の一つは，数論の多くの基本的対象— 代数体，ガロア表現，代数多様体，そして，保型形式 — を結びつける **L-関数**と呼ばれるある解析関数である．これは，その対象の性質や対象間の関係をある深い方法で組み込んでいる．この関数は次のような性質を持つディリクレ級数 $L(s) = \sum a_n n^{-s}$ ($\Re(s) \gg 0$ で収束する) である．

(i)　L-関数は $\prod_p P_p(p^{-s})^{-1}$ の形の**オイラー積**を持つ．ここで，積はすべての素数 p をわたる．また $P_p(T)$ は(代数的)整数係数を持つ固定された次数 n (次数が下がっている有限個の p は除く)の多項式であり，それは標数 p の有限体上の数論的対象のふるまいをある方法で述べている．

(ii)　L-関数は(s の整数値において，有限個の極のみを持ち) **有理型関数に解析接続できる**こと，そして，ある正整数 k に対し $L^*(s) = \pm L^*(k-s)$ の形の関数等式を持つことが(知られているか) 予想されている．ここで，$A^s \prod_{j=1}^{n} \Gamma(\frac{1}{2}(s+\alpha_j))$ ($A > 0$，$\alpha_j \in \mathbb{Z}$) という形の “ガンマ因子”$\gamma(s)$ に対し，$L^*(s) = \gamma(s)L(s)$ である．(より一般的に，関数等式は $L_1^*(s) = wL_2^*(k-s)$ の形をしていると思われる．ここで L_1 と L_2 はガロア表現とその反傾のような双対的な数論的対象の L-関数であり，w は絶対値 1 の代数的数である．しかしこれから挙げる例では L_1 と L_2 は常に一致する.)

(iii)　L-関数は**局所的リーマン予想**，すなわち，$P_p(p^{-s})$ の零点は直線 $\Re(s) = (k-1)/2$ 上にある，を(みたすか)みたすと予想される．

(iv)　L-関数は**大域的リーマン予想**，すなわち，$L(s)$ の零点は整数か直線 $\Re(s) = k/2$ 上にある，をみたすであろうと予想されている．

(v) L-関数は s の整数値において，周期と関連がある興味深い**特殊値**を持つ．

最後の性質がここで我々が関心を寄せているものであり，この章の残りで議論するものである．しかし，まず最初に L-関数やその性質の例をいくつか述べる．

もちろん，最初の例は“リーマン”の(実際はオイラーの)ゼータ関数 $\zeta(s)$ である．この場合は(i)は $n=1$ とすべての p に対し $P_p(T)=1-T$ として成り立つ(オイラー)．(ii)は $k=1$ と $\gamma(s)=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ として成り立つ(リーマン)．局所的リーマン予想(iii)は自明であり，一方，大域的リーマン予想(iv)は 100 万ドルの賞金のかかった問題である．そして(v)で述べている特殊値は次の表現

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\quad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\quad \zeta(6)=\frac{\pi^6}{945},\quad \zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450},\ \cdots \tag{10}$$

そして($\zeta(s)$ の解析接続の後)

$$\zeta(0)=-\frac{1}{2},\quad \zeta(-1)=-\frac{1}{12},\quad \zeta(-3)=\frac{1}{120},\quad \zeta(-5)=-\frac{1}{252},\ \cdots \tag{11}$$

である．これらはそれぞれ 1734 年と 1749 年にオイラーにより発見された．代数的整数論からくるリーマンゼータ関数のさまざまな一般化，特に(一般性の増える順序では)，ディリクレ指標 χ に関連する L-関数 $L(s,\chi)$ (ここでは $n=1$，$k=1$)，代数体 F のデデキントゼータ関数 $\zeta_F(s)$ ($n=[F:\mathbb{Q}]$，$k=1$)，そして，$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の表現 ρ に付随するアルチン L-関数 $L(s,\rho)$ (ここで $n=\dim\rho$，$k=1$) などを含むものが，19 世紀から 20 世紀はじめに発見され研究されてきた．§3.3 でそれらの関数の特殊値に関係する結果や予想を論じる．

20 世紀の数論における主要な発展は，上記の数論的 L-関数が代数多様体に関連するより一般的なディリクレ級数の 0 次元の場合にすぎないことを示した点にある．X を有限個の $\mathbb{Q}$ 係数多変数多項式の根の集合として与えられる，$\mathbb{Q}$ 上定義された滑らかな射影多様体とする．X に付随するゼータ関数を

$$\zeta_X(s) \ := \ \exp\biggl(\sum_{p\ 素数}\sum_{r\geq 1} N(p^r)\,\frac{p^{-rs}}{r}\biggr) \tag{12}$$

とおく．ここで，ほとんどすべての素数 p と $r \geq 1$ に対し，$N(p^r)$ を位数 p^r の有限体上の X の定義方程式の解の個数により定義する．もし X を $f(x)=0$ により定義される 0 次元多様体，ただし f は有理数係数の既約多項式，とすると，そのとき $\zeta_X(s)$ は f の根を $\mathbb{Q}$ に添加して得られる体のデデキントゼータ関数に一致する．X が 1 次元多様体(曲線)ならば，(X が楕円曲線のときのハッセの結果と任意の種数 g の X に対してのヴェイユの結果より)$\zeta_X(s)$ は $\zeta(s)\zeta(s-1)/L(X,s)$ の形をしている．ここで $L(X,s)$ は，X の**ハッセ・ヴェイユ L-関数** であり，(i)で述べた形のオイラー積を持ち(ここで $k=2$, $n=2g$)，そして，局所的リーマン予想(iii)をみたす．X が任意の次元 d ならば，ヴェイユ，グロタンディーク，ドヴァーク，ドリーニュなどの業績により $\zeta_X(s)$ は交代積としての標準的な表示

$$\zeta_X(s) \ = \ L_0(s)L_1(s)^{-1}\cdots L_{2d-1}(s)^{-1}L_{2d}(s)$$

を持つことが知られている．ここで各 $L_j(s)$ は上の(i)と(iii)の性質をみたすオイラー積を持つディリクレ級数で，$k=j+1$ であり，n は X の j 次ベッチ数と等しい．より一般的に，代数体のデデキントゼータ関数を分解して原始的部分であるアルチン L-関数が現れることに対応して，**モチーフ的 L-関数** $L(M,s)$ を定義することができる．これは X のコホモロジーの任意の自然な直和因子 M (“モチーフ”)に対し，性質(i)と(iii)をみたすオイラー積を持つ．

たった今与えられた性質が個々の因子，すなわち，(12)の r についての和をとることを正当化する．それに反して，オイラー因子をかけること，すなわち，(12)の p についての和の正当性は，ほとんどすべてが推測によるものである．なぜなら，期待される性質(解析接続，関数等式，リーマン予想，あるいは，特殊値) のどれもが，次元が 0 でない多様体に対しては一般的に証明できないからである．しかし，大域的な性質がいくつか確証される L-関数の第二の類，すなわち，**保型 L-関数**が存在する．この場合の原型は §2.3 で定義した保型形式 $\Delta(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\tau(m)q^m$ に関連するディリクレ級数 $\sum_{m=1}^{\infty}\tau(m)m^{-s}$ である．この関数は $n=2$ と $P_p(T)=1-\tau(p)T+p^{11}T^2$ として(i)のよ

うなオイラー積を持ち(これはラマヌジャンにより予想されモーデルが証明した)，$k=12$ と $\gamma(s)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ として(ii)のような関数等式をみたし(ヘッケ)［訳注：これはウィルトンの結果である］，そして，局所的リーマン予想(iii)をみたす(ドリーニュ)．任意のヘッケ固有形式 $f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m q^m$ から作られるヘッケ L-級数 $L(f,s)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m m^{-s}$ に対しても，同様の性質が成立する(ここで $n=2$，k は f の重さと等しく，そして，$P_p(T)=1-a_pT+p^{k-1}T^2$ である)．また，二次対称ベキ L-関数 $L(\mathrm{Sym}^2 f,s)$ (これは $n=3$，$P_p(T)=(1-p^{k-1}T)(1-(a_{p^2}-p^{k-1})T+p^{2k-2}T^2)$ のオイラー因子を持つ)や高次対称ベキ L-関数のような他の L-関数も f に付随する．それらはすべてアデール上の代数群 G の保型表現に付随する一般的なラングランズ L-関数の $G=GL(2)$ という特殊な場合に対応する．この分野における主要な予想は**ラングランズプログラム**であり，それは大ざっぱには，モチーフ的 L-関数の類と保型 L-関数の適当な類がちょうど一致すべきであるというものである．このプログラム(予想)のうち成り立つことが知られている場合は数少ないものの，20 世紀の数論の最も深い結果をいくつか含んでいる．その結果とは，類体論，重さ k のヘッケ固有形式 f のヘッケ L-級数 $L(f,k)$ はモチーフ的であるという定理($k=2$ の場合はアイヒラーと志村が，$k>2$ の場合はドリーニュが，そして $k=1$ の場合はドリーニュとセールが証明した)，そして，ワイルズと共同研究者により証明された $\mathbb{Q}$ 上の任意の楕円曲線の L-級数は重さ 2 の保型形式のヘッケ L-級数に等しいという定理(以前は谷山・ヴェイユ予想)である．ラングランズプログラムは数論のすべての主だった流れの重要な統一を与えるだけでなく，性質(i)–(v)を直接は証明できないいくつかの L-関数に対する確認も提供する．特に，ヘッケ L-級数に関する局所的リーマン予想(iii)（“ラマヌジャン・ペーターソン予想”）の証明は，それらとモチーフ的 L-関数を同一視することによってのみ証明されているし，モチーフ的 L-関数の関数等式が証明できる場合はモチーフ的 L-関数が保型 L-関数であることを示すことによってのみできている．

3.2 特殊値: ドリーニュとベイリンソンの予想

オイラーが発見した$\zeta(s)$の特殊値に関する式は既に述べた等式(10)と(11)である．ディリクレ級数$L(s,\chi)$に関する類似の結果は19世紀に証明され，総実体のデデキントゼータ関数に関しては1960年代に証明された(クリンゲン・ジーゲル定理)．異なる方向では，1960年代に，アイヒラー，志村，そしてマニンの結果が，重さkの保型形式のヘッケL-関数$L(f,s)$の$s=1,2,\ldots,k-1$における値を記述する式を導いた．そして，その後の数年で二次対称ベキL-関数$L(\mathrm{Sym}^2 f,s)$や，ある高次対称ベキL-関数のある特殊値に関する類似の結果が証明されるか，さもなければ，実験的に得られた．1979年には，ドリーニュ[13]がそれらすべてを特別な場合として含む，非常に一般的な予想を立てた．彼はどこでその型の特殊値が期待されるべきかを問うことから始めた．(10)と(11)に表れる変数は($s=0$を除く．これは$\zeta(s)$の関数等式において極$s=1$に対応していて，ゆえに例外である.）正の偶数と負の奇数である．言い換えれば，この種の良い公式を持たない値は負の偶数と正の奇数である．$\zeta(s)$の関数等式が$\zeta^*(s)=\zeta^*(1-s)$の形，$\zeta^*(s)$は$\zeta(s)$と$\gamma(s)=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$の積である，を持つことを思い出すと，禁じられた整数はちょうど$\gamma(s)$か$\gamma(1-s)$の極であることがわかる．このことや他の例に基づき，ドリーニュは$\gamma(s)$も$\gamma(k-s)$も極を持たない整数sを(モチーフ的)L-関数$L(s)$の**臨界値**と定義した．ここで$\gamma(s)$とkは前節の(ii)のように定義されたものである．そして，彼は任意のそのような臨界値における$L(s)$（または$L^*(s)$）の値は，周期を成分とするある行列式に0でない代数的な数を掛けたものになるという予想を立てた．この予想の実際の陳述は，はるかに正確であり，その周期成分の行列を正確に(そのコホモロジー群，あるいはL-関数を定義しているコホモロジー群の一部上のホッジフィルトレーションにより)記述するだけでなく，その未知の代数的因子がどの代数体に属すのか，$\overline{\mathbb{Q}}$の$\mathbb{Q}$上のガロア群の作用の下どのように変換するのかを明確に述べている．

ドリーニュの予想は多くの場合に証明されたり，実験的に確かめられている．それらのいくつかは次の二つの節で述べられるだろう．一方，この状況に含まれないL-関数の特殊値についてのいくつかの結果，とりわけ，代数体のデデキントゼータ関数の$s=1$における留数を記述したディリクレの類数

公式や，$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の L-級数の $s=1$ における最初にゼロにならない微分係数を記述したバーチ・スウィンナートンダイヤー予想がある．それら二つでは，問題の値に対しての証明された公式，または予想された公式は，ある正方行列(第一の場合は単数の対数であり，後の場合は有理点の高さを成分とする) の行列式として定義される“レギュレーター(単数規準)” と呼ばれる量を含む．1980 年代の初めに，ベイリンソンはドリーニュの予想の膨大な一般化をした．それは二つの特別な場合を含むだけでなく，すべての整数変数でのモチーフ的 L-関数の値や，0 でない最初の微分係数(テイラー展開の最初の係数) の値も含まれる．このことは，それらの値(ガロア群の下のふるまいだけがわかる 0 でない代数的数を決定することはできないが) をその L-関数を定義する多様体上の周期や，ディリクレの類数公式やバーチ・スウィンナートンダイヤー予想のものを一般化したレギュレーターで与えることによるのである．数年後，ショル [21] はこのレギュレーターを周期として表現できることに気づいた(また，部分的にはブロックとベイリンソンのより早い結果によりわかっていた)．これはベイリンソン予想の改良を導く．この改良はあまりに専門的であり，ここに述べることはできないが，その本質は次の美しい(予想の)主張により把握できるであろう．これを広く普及することがこの論文を書くことの主な動機の一つであった．

■**予想** (ドリーニュ・ベイリンソン・ショル)　$L(s)$ をモチーフ的 L-関数，m を任意の整数，そして，r を $s=m$ における $L(s)$ の零点の位数とする．そのとき $L^{(r)}(m)\in\widehat{\mathcal{P}}$.

次の二つの節でドリーニュとベイリンソンによる予想の説明を与え，§3.5 でショルによる改良をバーチ・スウィンナートンダイヤー予想の場合に詳しく説明する．

3.3　代数的整数論からの例

既に，等式(10)と(11)でリーマンゼータ関数の特殊値に関するオイラーの公式を与えた．ディリクレ L-関数 $L(s,\chi)$ の場合も，臨界値が χ が奇指標(すなわち $\chi(-1)=-1$)のときに正の奇数と負の偶数となる点が，$\zeta(s)$ や偶指

標に対して臨界値が正の偶数と負の奇数となることと違うだけである．なぜなら，この場合ガンマ因子 $\gamma(s)$ は $A^s\Gamma(s/2)$ ではなく $A^s\Gamma((s+1)/2)$ の形をしているからである．

次の場合は代数体 F，すなわち，α は既約多項式 $f(X)\in\mathbb{Z}[X]$ の根とし $F=\mathbb{Q}(\alpha)$，のデデキントゼータ関数 $\zeta_F(s)$ である．このゼータ関数は（f の判別式を割らない p に対して）p^r 元体内での方程式 $f(x)=0$ の根の数を $N(p^r)$ とする式(12)によって §3.2 で定義した．f が法 p で $\mathbb{F}_p[X]$ 内の次数 $n_1,\ldots,n_r$ の既約多項式の積に合同なら，簡単な計算により，それは $\zeta_F(s)$ が $P_p(T)=(1-T^{n_1})\cdots(1-T^{n_r})$ とする §3.1 の(i)で与えられた形のオイラー積を持つことと同値である．同様に，$\zeta_F(s)$ の p-オイラー因子は F 内での素数 p の分解を述べており，それはこの関数に付随する興味深さを説明している．$\zeta_F(s)$ の関数等式はヘッケにより証明された．（ヘッケの方法はゼータ関数をテータ関数のメリン変換として表すというリーマンの方法にならったものであるが，モチーフ的 L-関数の関数等式は，保型形式やその一般化に基づいているという §3.1 の終りの主張に合致している.） この場合は，$k=1$ であり $A^s\Gamma(s/2)^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}$ の形のガンマ因子を持っている．ここで r_1 と $2r_2$ は，それぞれ，多項式 f の実と虚の根の個数である．それゆえ，F が総実($r_2=0$)ならリーマンゼータ関数のときと同じ臨界値(すなわち，正の偶数と負の奇数)を持ち，それ以外なら臨界値を持たないことが分かる．前者(F が総実)の場合，前節のクリンゲンとジーゲルの定理が式(10)と(11) の類似を与える．特に，$\zeta_F(s)$ の s が負の奇数での値は 0 でない有理数である．

最初の非臨界値は $s=1$ である．ここでは前節で述べたディリクレの類数公式が，$\zeta_F(s)$ の留数を π^{r_2} と各成分が F の単数の対数の $(r_1+r_2-1)\times(r_1+r_2-1)$ 行列の行列式であるレギュレーターの積の代数的数倍(実際は，有理数の平方根）として表現している．この代数的因子も正確に知られており F の類数を含み，それゆえこの定理の名前となっているのであるが，ここでは立ち入らない．

ディリクレの定理は 19 世紀の中ごろに証明された．それは二つの一般化を持っているが，どちらも特別な場合を除いては予想である．一つは $\zeta_F(s)$ をアルチン L-級数 $L(s,\rho)$ に置き換えることである．ここで ρ は F のガロア群の既約表現である．（デデキントゼータ関数は有限個のアルチン L-級数に

分解し，逆に，アルチン L-級数 $L(s,\rho)$ はあるデデキントゼータ関数の因子であるので，これは $\zeta_F(s)$ を見ることよりもより改良されている．$L(s,\rho)$ の有理型接続と関数等式は知られているが，一方，その正則性は一般には予想のみされている.）このときのディリクレの公式の一般化はスターク予想である．これは $L(1,\rho)$ はいつでも代数的数と，π のベキ，そして，単数の対数からなる行列の行列式の積として表示できるというものである．（詳しくは，[24] と [25] を参照せよ.）この予想はいくつかの場合に証明され，その他の多くの場合には数値的に確かめられているが，一般的な証明はまだまだ遠い．知られている主な場合はクロネッカーの極限公式であり，これは虚二次体に関連するある二次元表現に対して問題の主張を証明するために，保型形式の理論からの方法を用いて示される．

異なる方向の一般化としては，$\zeta_F(s)$ を再び，しかし今度は非臨界値 $s=m$（すなわち，F が総実のときは正の奇数であり，それ以外では任意の正の整数である）において見ることができる．ここでは，$\zeta_F(m)$ の代数的 K-理論からくるレギュレーターとしての表示が 1975 年にボレルによって発見された [10]．前節の最後に説明した一般的な段取りに従うと，この表示は周期であるが，あまり明示的ではない．なぜなら，体の高次の K-群に対してはアルゴリズム的記述が知られていないからである．特殊値 $\zeta_F(m)$ に対する，より計算しやすい，しかし予想である公式は，著者の一人 [30] により，m 次多重対数関数 $Li_m(z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^m$ の代数的変数（より正確には，F に属する変数）における特殊値によって与えられた．ボレルのレギュレーターと多重対数関数の値は環 $\mathcal{P}$ に属すので，この予想はいくつかの具体的な場合において，§1.2 の意味で，"接近可能" であることが分かる．この予想は $m=2$ と 3 の場合に証明されており（後者の結果は，より大変で，ゴンチャロフによる），そして，多くの例で数値的に高い精度まで調べられている．

それら類数公式の二つの一般化を，アルチン L-関数の整数値 $s=m>1$ における値を見ることにより，組み合わせることができる．そして，それは再び多重対数関数からなる行列の行列式によって表示できると予想される．クロネッカーの極限公式に対応する場合には，この命題ははるかに明確にでき，そして，整数係数の正定値二元二次形式 Q に付随する**エプシュタインゼータ関数**

$$\zeta_Q(s) = \sum_{x,y\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{Q(x,y)^s} \tag{13}$$

の $s=m$ における値が(代数的因子と π のベキを除いて) m 次多重対数関数の(Q により定義される虚二次体のアーベル拡大に属する) ある代数的変数における値に等しいことを予測することができる．典型的な例として，

$$\sum_{x,y\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(2x^2+xy+3y^2)^3} = \frac{64\pi^3}{23^{5/2}}\left(Li_3(\alpha) - \frac{1}{3}Li_3(\alpha^3) + \frac{3}{2}Li_3(-\alpha^4) + Li_3(\alpha^5)\right) \tag{14}$$

がある．ここで $\alpha = 0.75487\ldots$ は $\alpha^3+\alpha^2=1$ の実数根である．この予想は多くの場合が調べられ，$m=2$ の場合はレビンにより証明されている．(詳しくは [33] を見よ.)

3.4　保型形式からの例

再び，臨界値をまず扱う．既に §3.2 で述べたように，それらは [13] 内の予想に対しての主な動機付けを与える例である．重さ k の保型形式 $f(z)=\sum a_n q^n$ (例えば，モジュラー群 $SL(2,\mathbb{Z})$ 上の保型形式とする)を考える．f はヘッケ固有形式であると仮定すると，その L-級数 $L(f,s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ は §3.1 で述べたようなオイラー積を持つ．(読者は $f=\Delta$，$k=12$ の場合を考えるとよい.) 関数等式は $L^*(f,s)=\pm L^*(f,k-s)$，ただし $L^*(f,s)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(f,s)$ の形をしているため，ドリーニュの意味での臨界値は $s=1,2,\ldots,k-1$ である．(アイヒラー，志村，およびマニンによって発展した周期多項式の理論を用いるか，あるいはランキンの方法によって) f に対して二つの実数 C_+，C_- が存在して，次の性質をみたすことを示すことができる．$L^*(f,s)$ の s の偶数値(奇数値)における値は C_+ (C_-)の代数的数倍であり，積 C_+C_- は f のペーターソンノルムの平方 $(f,f)=\int_{\mathfrak{H}/\Gamma}|f(x+iy)|^2 y^{k-2}dxdy$ の代数的数倍である．例えば，$f=\Delta$ に対し二つの定数 $C_+=0.046346\ldots$，$C_-=0.045751\ldots$ を得る．また $C_+C_-=2^{11}(\Delta,\Delta)$ である．

s	6	7	8	9	10	11
$L^*(\Delta,s)$	$\frac{1}{30}C_+$	$\frac{1}{28}C_-$	$\frac{1}{24}C_+$	$\frac{1}{18}C_-$	$\frac{2}{25}C_+$	$\frac{90}{691}C_-$

[13] で，ドリーニュは彼の予想によってこうした結果が導かれることを，$C_\pm$ が Δ に付随するある周期積分になることを用いて示しただけでなく，彼の予想からは，任意の $r \geq 1$ と r によって決まるある有限集合に属する s に対して，$L(\mathrm{Sym}^r \Delta, s)$ の特殊値がある明確に与えられた π，C_+，そして，C_- の単項式の有理数倍になるであろうことが予言されることも示した．これらの結果は $r = 2$ に対しては知られている．このとき臨界値は $s = 12, 14, \ldots, 22$ で，数 $L(\mathrm{Sym}^2 \Delta, s)$ は $\pi^{2s-11} C_+ C_-$ の有理数倍である．しかし，より高い r に対しては計算された例がなかった．その後の $r = 3$（この場合，臨界値は $s = 18, 19, \ldots, 22$ であり，特殊値は $\pi^{2s-11} C_\pm^3 C_\mp$ に比例する）と $r = 4$（この場合 $s = 22, 24, \ldots, 32$ で L-関数値は $\pi^{3s-33} C_+^3 C_-^3$ に比例する）に対しての数値計算はドリーニュの予想を高い精度まで確認し，その予想の正当性に納得の行く証拠を与えた．

ドリーニュが初期に行った L-級数 $L(\Delta, s)$ がモチーフ的であることの証明は $L(\Delta, s)$ をレベル 1 のモジュラー曲線上の普遍楕円曲線の 10 次ファイバーベキとして定義される久賀多様体と呼ばれるある（複素）11 次元代数多様体の 11 次コホモロジー群のある 2 次元部分の L-関数と捉えていた．よって，彼の一般的な予想に従うと，数 $C_\pm$ は，この多様体の適当な（実）11 次元サイクル上の 11 形式の積分となるはずである．これは複雑に聞こえるが，実際には，全く初等的な方法で書くことができる．これを行うために，積分表示 $L^*(\Delta, s) = \int_0^\infty \Delta(iy)\, y^{s-1}\, dy$ から始める．§2.1 で議論した楕円曲線の族の一つ（きちんとさせるために，例えば，等式(7)により与えられる二番のもの）を選び，それをモジュラー曲線のパラメーターを定め直すために用いる．§2.3 で見たように，(8)の t に保型関数 $\lambda(z)$ $(z \in \mathfrak{H})$ を代入すると，$\Omega_2(t) = \pi\theta(z)^2$ と $\Omega_1(t) = z\Omega_2(t)$ となる．ここで $\theta(z)^2$ は重さ 1 の保型形式である．関数 $\Delta(z)$ は，重さ 12 の保型形式であるが，$\theta(z)^2$ の 12 乗と $\lambda(z)$ $(= t)$ の有理関数（これは $t^2(t-1)^2$ であることが分かる）の積で書ける．同様に，重さ 2 の保型形式 dt/dz は $(\theta(z)^2)^2$ と別の t の有理関数の積であり，これを用いると明確な周期表現

$$L^*(\Delta, n) = \frac{1}{i^{n-1}\pi^{11}} \int_0^1 \Omega_1(t)^{n-1}\, \Omega_2(t)^{11-n}\, t(1-t)\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots, 11)$$

がわかる．同様な代入により，また，

$$(\Delta,\Delta) \doteq \int_{\mathbb{C}}\left(\int_{\mathbb{C}}\frac{d\mu(x)}{|x(x-1)(x-t)|}\right)^{10}|t|^2\,|1-t|^2\,d\mu(t)$$

を得る．ここで $d\mu(x)$（$= dx_0\,dx_1$ もし $x = x_0 + ix_1$ ならば）は $\mathbb{C}$ のルベーグ測度であり，$\doteq$ は $\mathbb{Q}^{\times}\pi^{\mathbb{Z}}$ 内の計算可能な因子を除いて等しいことを意味する．これははっきりと $(\Delta,\Delta) \in \widehat{\mathcal{P}}$ を示している．

今度は非臨界値を考えよう．次に述べるのは §3.2 の予想の特別な場合であるが，その分野の専門家達にさえ良くは知られていないと思われる．

■**定理**　f を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された重さ $k \geq 2$ の保型形式とする．そのとき，すべての $m \geq k$ に対し（$0 < m < k$ の臨界値に対しても同様に）$L(f,m) \in \widehat{\mathcal{P}}$ となる．

これは $m = k = 2$ の場合にベイリンソン [2] がランキンの方法とコホモロジー操作を組合せて証明し，一般の場合はデニンガーとショル [14] が同様な方法を拡張して証明した．ベイリンソンの証明を書き下せば（全く明らかな演習問題ではないが），$L(f,2)$ が，π のベキを除いて，$\int_a^b \log|A(x)|\,B(x)\,dx$ の形をした積分の有理数係数の線型結合として表されることがわかる．ここで $A(x)$, $B(x) \in \overline{\mathbb{Q}(x)}$ かつ a, $b \in \overline{\mathbb{Q}}$ である．他方では，二変数ローラン多項式 $P(x,y)$ のマーラー測度 $\mu(P)$（(4) を参照せよ）もまたこの形の積分と等しい（$\mu(P)$ は二重積分として定義されるが，この二つの積分の一つはイエンゼンの公式を用いて実行することができる）．多項式の零点が $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線になっていると，その多項式のマーラー測度は，π のベキを除いて，この曲線の L-級数の $s = 2$ での値の有理数倍に等しいということが §1.2 の終りに与えた二つの例を含む多くの場合に成り立っている．読者は詳細とこの美しい関係の数多くの例について [11] および [20] を参照されたい．

$k = 1$ に対しては，ベイリンソンの方法は適用できない．なぜなら，それは，n を $L(f,s)$ の臨界値とするとき，$L(f,m)L(f,n)$ の積分表示をランキンの方法で得ることから始めるのであるが，そもそも，重さが 1 のときは臨界値が存在しないのである．もし f を重さ 1 の固有形式とすると，ドリーニュとセールの定理は $L(f,s)$ が 2 次元ガロア表現 ρ のアルチン L-級数に等しいことを言っている．ゆえに，§3.3 の状況に戻ると，そこで議論された予想は $L(f,m)$ が m 次多重対数関数の代数的変数における値によって表現で

きるべきであると言っていることになる．等式(14)はこれの一つの例である．なぜなら，左辺に現れる数は重さ 1 のテータ級数 $f(z)=\sum_{x,y} q^{2x^2+xy+3y^2}$ のちょうど $L(f,3)$ の値になるからである．一般に，保型形式 f が二元二次形式 Q に付随するテータ級数で，$L(f,s)=\zeta_Q(s)$ のとき(それらはいわゆる CM 形式であり，$GL(2,\mathbb{C})$ 内の像が二面体群になる 2 次元表現 ρ に対応している)は，いつでも [33] の §7 で述べられている計算によって $L(f,m)$ を $\int_\alpha^\beta E_{2m}(z)\,Q(z)^{m-1}\,dz$ の形の積分の和として書くことができる．ここで α と β は CM 点であり(§2.3 を見よ)，$E_{2m}(z)$ は重さ $2m$ の正則アイゼンシュタイン級数である．そのとき $L(\Delta,n)$ に対して上で用いたのと同様の方法によりこの積分を明確に周期として書き直すことができる．このことはこの型の保型形式に対する上の定理を証明するのと同様に，前節で論じた高次のクロネッカーの極限公式が，まだ予想ではあるが，§1.2 の意味で “接近可能等式” であることを意味している．

$f(z)$ が $2k$ 変数の二次形式に付随するテータ級数の場合に上の定理(または $k=1$ のときは上の議論)を適用することにより，次を得る．

■系　$Q(x_1,\ldots,x_n)$ を $\mathbb{Q}$ 係数の偶数個の変数を持つ正定値二次形式とする．そのときエプシュタインゼータ関数

$$\zeta_Q(s) \;=\; {\sum_{x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{Z}}}' \frac{1}{Q(x_1,\ldots,x_n)^s}$$

のすべての整数 $s>n/2$ での値は $\widehat{\mathcal{P}}$ に属す．

■問題　これは奇数個の変数の二次形式に対してもまた成り立つだろうか? 特に，数

$$\begin{aligned}&{\sum_{x,\,y,\,z\in\mathbb{Z}}}' \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\\ &\qquad = 16.532315959761669643892704592887851743834129\ldots\end{aligned}$$

は $\widehat{\mathcal{P}}$ に属しているか？

最後の例として，偶数の重さ k のヘッケ固有形式の L-級数 $L(f,s)$ が関数等式の中心点 $s=k/2$ で 0 になっている場合を考える．これはバーチ・ス

ウィンナートンダイヤー予想(§3.5 を参照せよ)の場合の中で特に興味深い．ここでは $k=2$ であり，零点の位数は考えている楕円曲線のモーデル・ヴェイユ群のランクに等しいと予想されている．しかし，$L(f,s)$ の関数等式が符号 -1 を持つなら任意の重さの場合に現れる．この状況の下，次を得る．

■定理 f を偶数の重さ k のヘッケ固有形式とし，$L^*(f,s)=-L^*(f,k-s)$ とする．そのとき $L'(f,k/2)\in\widehat{\mathcal{P}}$.

この定理ははっきりとは述べられてはいないが，[15] の結果から導かれる．[15] の主な目的は L-級数の零点の位数とモーデル・ヴェイユのランクが共に 1 のときの楕円曲線に関するバーチ・スウィンナートンダイヤー予想の公式を有理数倍を除いて証明することである．しかし，証明の解析部分は任意の偶数の重さ k の保型形式に適応し，そして，$L'(f,k/2)$ を代数的値の対数とより高い重さのグリーン関数 $G_{k/2}(z_1,z_2)$ の CM 点における特殊値の有限和としての表示を与える．それらの特殊値は周期となることもわかる．このことから，ちょうど今述べた定理以外の結果もでる．[15] と [16] で，重さ k のカスプ形式が存在しない場合には，グリーン関数の任意の CM 点における値が代数的数の対数に代数的数を掛けたものになるだろうという形の予想を立てた．これらの値が周期として表現できるという事実は，この予想を "接近可能" にする．これの一つの例(この例の左辺と右辺はモジュラー群に関する $-G_2(i,i\sqrt{2})/\sqrt{2}$ の証明された値と予想された値に相当する）は，予想される等式

$$\frac{20G}{\pi}+1728\pi^2\int_{\sqrt{2}}^{\infty}\frac{E_4(iy)\Delta(iy)}{E_6(iy)^2}\,(y^2-2)\,dy\ \stackrel{?}{=}\ \log\frac{27+19\sqrt{2}}{27-19\sqrt{2}}$$

である．ここで $G=1-3^{-2}+5^{-2}-\cdots$ はカタラン定数(それ自身は周期)である．$L(\Delta,n)$ の臨界値に対して用いたものと同様な変換 $t=\lambda(iy)$ によって，この公式の左辺の積分を周期積分

$$\int_0^{3-\sqrt{2}}\frac{t^2(t-1)^2(t^2-t+1)}{(t+1)^2(t-2)^2(2t-1)^2}\left(\Omega_1(t)^2+2\Omega_2(t)^2\right)dt$$

の簡単な倍数として表すことができる．ここで $\Omega_i(t)$ は(8)のように定義する．したがって，少なくとも第 1 章で議論したような計算の法則のみを用いて，初等的な証明を与えようと試みることができる．

3.5 バーチ・スウィンナートンダイヤー予想

バーチ・スウィンナートンダイヤー(BSD)予想は，もともと，数値実験に基づいて 1960 年代中ごろに定式化されたものである．この予想は，数論において最も美しく，最も興味をそそる未解決問題の一つであり，既に §3.2 で述べたように非臨界値における L-級数についての一般的なベイリンソン予想に対するスタート地点であり，動機を与える例となった．この節 — この論文で最も長く，そして，唯一完全な証明を含む節 — では，その主張を思い出し，それがどのように周期のみを含む形に書き直せるかを示す．そのために，§3.2 で述べたショルによるベイリンソン予想の一般的な再定式化の具体的な場合を説明する．この節の計算は，BSD 予想のブロック版([8])の初等的で明確な実現と見ることもできる．初等的定式化の可能性を示したゴンチャロフに感謝したい．

まず BSD 予想の古典的形から思い出そう．E を $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線とし，$A, B \in \mathbb{Z}$ なるワイエルシュトラス方程式 $y^2 = x^3 + Ax + B$ により与えられるものとする．その L-関数 $L(E, s)$ は $\Re(s) > \frac{3}{2}$ で $\prod_p P_p(p^{-s})^{-1}$ の形のオイラー積により定義される．ここで(有限個を除くすべての p に対し) $P_p(X)$ を $1-(N_p-p)X+pX^2$ とする．ただし，N_p は $y^2 = x^3+Ax+B$ を法 p で見た解の個数である．r をモーデル・ヴェイユ群 $E(\mathbb{Q})$ のランクとすると(モーデルの定理によって $E(\mathbb{Q})$ が有限生成であることは知られているので，r は有限である)，この予想が主張するものは，関数 $L(E, s)$ の $s = 1$ における零点の位数はちょうど r であること，そして，

$$L^{(r)}(E, 1) \stackrel{?}{=} c \cdot \Omega \cdot R \tag{15}$$

である．ここで $\Omega = \int_{E(\mathbb{R})} dx/y$ は実の周期，R (レギュレーター) は $E(\mathbb{Q})/$(ねじれ) の $\mathbb{Z}$-基底に関して後で定義するハイトペアリング (,) の行列式であり，そして，c はある 0 でない有理数で，それはこの予想により明確に述べられているが，ここでは略そう．もちろん，この予想を意味のあるものにするために，まず，始めは $\Re(s) > \frac{3}{2}$ で定義されていた $L(E, s)$ がすべての s (少なくとも $s = 1$) に正則に接続されることを知らなくてはならない．もし楕円曲線 E がモジュラーであるならこのことは保証されている．ま

た，楕円曲線がモジュラーかどうかは与えられた曲線ごとに初等的な方法で調べることができるのだが，今ではワイルズ達の定理のおかげですべての楕円曲線がモジュラーであることが知られている．

証明したい命題は次である．

■定理 (15) の右辺は $\mathcal{P}$ に属す．

左辺はどうであろうか？ 次を定式化する．

■問題 4 f を偶数の重さ k のヘッケ固有形式，そして，r を $L(f,s)$ の $s=k/2$ における零点の位数とする．そのとき $L^{(r)}(f,k/2)\in\mathcal{P}$ であることを示せ．

前節で述べた結果は，$r=0$ と $r=1$ の場合を示している．もしこれを一般に証明できたなら— 手の届くところにあるのかもしれない —，それと上の定理を組み合わせることは，第1章の意味で BSD 予想の等式を “接近可能等式” にし，そして，このように証明ではないとしても，少なくとも各々の楕円曲線に対して予想された等式の正しさを確認する方法を与える．数値的に高い精度まで調べられている場合は多いにもかかわらず，これまでに(15)が正確に分かっているランク $r\geq 2$ の楕円曲線は一つもないことを強調しておこう．

定理を証明する前に，数値例を挙げて説明する．E を導手 37 の楕円曲線 $y^2 = 4x^3 - 4x + 1$ とする．これは無限のモーデル・ヴェイユ群を持つ最小導手の曲線である．明確に言うと，$E(\mathbb{Q})$ は無限巡回群であり，生成元は $P=(0,1)$ であり，いくつかの始めの元として次の点を含む．

n	2	3	4	5	6	7
nP	$(1,1)$	$(-1,-1)$	$(2,-5)$	$(\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$	$(6,29)$	$(-\frac{5}{9},\frac{43}{27})$

レギュレーターは $(P,P)=2h(P)$ と等しい．ここで，$h(P)$ は，標準的なハイト(高さ)であり，$\lim_{n\to\infty}(\log N_n)/n^2$ として定義される．ただし，N_n は nP の x 座標の分子と分母の絶対値の大きい方である．(ハイトペアリングのより便利な定義は定理を証明した後で与えることにしよう．) 数値的に，

$$\begin{aligned}\Omega &= \int_{E(\mathbb{R})}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-4x+1}} = 5.98691729\ldots,\\ R &= (P,P) = 0.0511114082\ldots\end{aligned}$$

を得，そして，バーチ・スウィンナートンダイヤーの公式(この場合は証明されている)は，

$$L'(E,1) = \Omega R = 0.305999773\ldots$$

を述べている．前に言っていた周期としての(15)の表現は，ここでは，

$$\Omega R = \left| \begin{matrix} \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x^3-4x+1}} & \int_{-1}^{0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4x^3-4x+1}}\right) \frac{dx}{2x} \\ \int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4x^3-4x+1}} & \int_{1}^{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4x^3-4x+1}}\right) \frac{dx}{2x} \end{matrix} \right| \tag{16}$$

により与えられる．

さて，証明に戻る．(15)のレギュレーターは $r \times r$ 行列 (P_i, P_j) の行列式として定義される．ここで，$\{P_i\}$ は自由 $\mathbb{Z}$-加群 $E(\mathbb{Q})/$(ねじれ)の基底である．多少ひねくれているが，この格子を $\mathcal{R}$ と $\mathcal{L}$ という文字(*R*egulator *L*attice，または，*R*ight と *L*eft を考えている)により表す．そして，ハイトペアリング (,) を，これは対称であるが，$\mathcal{L} \times \mathcal{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像として考える．このような非対称性を導入するのは，$\mathcal{L}$ と $\mathcal{R}$ をより大きな格子 $\widehat{\mathcal{L}}$ と $\widehat{\mathcal{R}}$ に拡張するためである．ここで，$\widehat{\mathcal{L}}$ と $\widehat{\mathcal{R}}$ は，$\mathcal{L}$ と $\mathcal{R}$ に対しては

$$0 \to \mathbb{Z} \to \widehat{\mathcal{L}} \to \mathcal{L} \to 0, \qquad 0 \to \mathbb{Z} \to \widehat{\mathcal{R}} \to \mathcal{R} \to 0 \tag{17}$$

によって関連し，そして，お互いには拡張されたハイトペアリング $\widehat{\mathcal{L}} \times \widehat{\mathcal{R}} \to \mathbb{R}$ の存在により関連し，そして，この新しい格子 $\widehat{\mathcal{L}}$ と $\widehat{\mathcal{R}}$ は(標準的には) お互いに同型ではない．目標とすることは，上で与えられた定理の主張よりもより正確になるが，(15)内の積 ΩR が $\widehat{\mathcal{L}}$ と $\widehat{\mathcal{R}}$ の $\mathbb{Z}$-基底に関しての拡張されたハイトペアリングの行列式として定義される拡張されたレギュレーター $\widehat{R}$ に等しいことを示すことである．

まず，ふつうのハイトペアリングの定義を思い出す．今後ずっとねじれを無視して，$\mathcal{L} = \mathcal{R}$ を $\mathbb{Q}$ 上定義された次数 0 の E の因子群 $\mathrm{Div}^0(E/\mathbb{Q})$ の，その主因子の部分群 $\mathrm{Prin}(E/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}(E)^\times/\mathbb{Q}^\times$ による剰余群として書くことができる．$D = \sum_i n_i(x_i)$ ($n_i \in \mathbb{Z}$，$x_i \in E(\overline{\mathbb{Q}})$，すべての $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ に対して $D^\sigma = D$) と $D' = \sum_j n'_j(x'_j)$ が次数 0 の二つの因子ならば，簡単のため互いに素な台を持つと仮定するが，そのとき，(大域的)ハイトペア

リング (D,D') は局所的ハイトペアリング $(D,D')_v$ の和に等しい．ここで，v は $\mathbb{Q}$ の素点，すなわち，有限素点と“無限素点”，をわたる．局所的ハイトペアリングは D と D' について対称であることと，E の p 進位相，または，複素位相で x_i の連続関数に拡張され，そして，$D'=(f)$ が主因子ならば式 $(D,D')_v=\sum_i n_i \log|f(x_i)|_v$ によって与えられる．最後の式は，もし因子の一つが主因子ならば（積公式 $\prod_v |\cdot|_v=1$ により）和 (D,D') が 0 になり，それゆえ，レギュレーター格子 $\mathcal{L}=\mathcal{R}$ 上定義可能であること，また同時に，局所的ペアリング $(\ ,\ )_v$ は一意的であること（なぜなら，任意に二つを選び，その差を考えると，それはヤコビアンの p 進または複素の点，すなわちコンパクト群，から $\mathbb{R}$ 内への連続な双線型関数であり，ゆえにゼロになるからである）を示している．存在することを示すためには，この条件をみたす局所的公式を見つけなければならない．このことは，有限素点に対して $(D,D')_p=(D\cdot D')_p \log p \in \mathbb{Z}\log p$（ここで $(D\cdot D')_p$ は，局所交点数であり，D と D' の点が法 p や p のベキでお互いに合同であるのはどの程度であるかを測る整数であり，有限個の p を除いてゼロになる），そして，無限素点に対して $(D,D')_\infty=\sum_j n'_j\, G_D(x'_j)$ と置くことにより与えられる．ここで，$G_D(x)$ は D に付随するグリーン関数であり，x_i の近傍の局所座標において $G_D(x)=n_i\log|x-x_i|+\mathrm{O}(1)$ をみたす $E(\mathbb{C})\setminus|D|$ 上の唯一の（D' とのペアリングをとると無くなる付加定数のちがいを除く）調和関数として定義される．$G_D(x)$ は $\Re\bigl(\int_a^x \omega_D\bigr)$ として構成することができる．ここで，$a\in X(\mathbb{Q})$ は任意の基点であり，ω_D は X 上の有理型 1 形式（微分）で次をみたすものである．

(i)　ω_D は x_i で留数 n_i の 1 位の極を持ち，他に極を持たない．

(ii)　ω_D は $\mathbb{R}$ 上定義されている．

(iii)　$\Re\bigl(\int_{E(\mathbb{R})}\omega_D\bigr)=0$.

最後の条件は，条件 (i) と (ii) において ω_D は $\omega_0=dx/y$ の実数倍を加える自由度があり，$\Re\bigl(\int_{E(\mathbb{R})}\omega_0\bigr)=\Omega\neq 0$ であることから可能である．そして，その条件は，積分 $\int_a^x\omega_D$ が $\int_{E(\mathbb{R})}\omega_D$ の半整数倍のちがいのみを除いて定義されるため（これは (ii) と，$E(\mathbb{R})$ のホモロジー類は $H_1(E(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ の複素共役に

より固定される部分の生成元の 1 倍か 2 倍であることによる)，必要であり，我々にとって重要なものである．それは，$x \in E(\mathbb{Q})$ に対し，$G_D(x)$ が $\varOmega^{-1}\mathcal{P}$ に属することを意味する．実際に，ω_D^* を条件(i)と "$\mathbb{R}$" を "$\mathbb{Q}$" に置き換えた条件(ii)，このことは D が $\mathbb{Q}$ 上定義されているため可能であるが，をみたす二つ目の有理型 1 形式とする．($\widehat{\mathcal{L}}$ を後で定義するとき，もし，単なる $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間というより格子を得たいなら，実際に，ω_D をネロンモデルで $\mathbb{Z}$ 上定義されているようにせねばならない．しかし，これは些細な点であり，無視することにする.) そのとき，以前述べたことにより，ある $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し，$\omega_D = \omega_D^* + \lambda\omega_0$ となる．係数 λ は $\Re\left(\int_{E(\mathbb{R})}\omega_D^*\right) + \lambda\varOmega = \Re\left(\int_{E(\mathbb{R})}\omega_D\right) = 0$ により計算され，ゆえに，要求されたように，

$$G_D(x) = \frac{1}{\varOmega}\begin{vmatrix}\Re\left(\int_{E(\mathbb{R})}\omega_0\right) & \Re\left(\int_a^x \omega_0\right) \\ \Re\left(\int_{E(\mathbb{R})}\omega_D^*\right) & \Re\left(\int_a^x \omega_D^*\right)\end{vmatrix} \in \frac{1}{\varOmega}\mathcal{P} \qquad \text{if } x \in E(\overline{\mathbb{Q}}) \quad (18)$$

である．このことは，(D, D') が有限個の項 $G_D(x)$ と $\log p$ の和と書けるので，$\varOmega^{-1}\mathcal{P}$ に属することを示している．

いま，格子 $\widehat{\mathcal{L}}$ と $\widehat{\mathcal{R}}$，そして，それらのペアリングを構成する．$\widehat{\mathcal{L}}$ として，$\mathbb{Q}$ 上(または，むしろ $\mathbb{Z}$ 上)定義され留数が整数の一位の極のみを持つ有理型 1 形式のなす群を $f \in \mathbb{Q}(E)^\times$ なる 1 形式 df/f の部分群により割ったものをとる．(17)内の写像 $\widehat{\mathcal{L}} \to \mathcal{L}$ は 1 形式 ω に付随する因子 $\mathrm{Res}(\omega) = \sum_i n_i(x_i) \in \mathrm{Div}^0(E/\mathbb{Q})$ により与えられる．ここで，$\{x_i\}$ は ω の極であり，$\{n_i\}$ は対応する留数である．一方，写像 $\mathbb{Z} \to \widehat{\mathcal{L}}$ は 1 に ω_0 を対応させるものとする．もう一つの格子 $\widehat{\mathcal{R}}$ を，$\mathbb{R}$ 上定義される(すなわち，複素共役でホモロジー不変な) $E(\mathbb{C})$ 上の(向き付けられた) 1 チェイン C で境界は $\mathbb{Q}$ 上定義されているもののホモロジー類群を "切断" からなる部分群により割ったものとして定義する．ここで，C が "切断" であるとは，$E(\mathbb{C}) \smallsetminus |C|$ 上の正則関数 φ で，その値が重複度 m の C の成分を(すべてが向き付けられているとして，左から右へ)横切るとき m だけ飛越し，そして，$f = e^{2\pi i\varphi}$ が E 上有理型になるものが存在するときを指す．そのとき，f は因子 ∂C を持ち，ゆえに，∂C は主因子である．そして逆に，任意の $f \in \mathbb{Q}(E)^\times/\mathbb{Q}^\times$ はホモロジー的に一意的な付随する切断をもつ．ゆえに，実際，境界写像 $C \mapsto \partial C$ はちゃんと定義された写像 $\widehat{\mathcal{L}} \to E(\mathbb{Q})/(\text{ねじれ}) = \mathcal{L}$ を与える．残りの写像

$\mathbb{Z} \to \widehat{\mathcal{L}}$ は $1 \mapsto E(\mathbb{R})$ により定義され，そして，ペアリング $\widehat{\mathcal{L}} \times \widehat{\mathcal{R}} \to \mathbb{R}$ は

$$(\omega, C) \;=\; \Re\bigl(\textstyle\int_C \omega\bigr) \;+\; \bigl(\mathrm{Res}(\omega),\, \partial C\bigr)_f \tag{19}$$

により定義される．ここで，$(D, D')_f = \sum_p (D, D')_p \in \log(\mathbb{Q}^{>0})$ は二つの因子 D と D' のハイトペアリングの有限部分を意味する．このペアリングの定義がうまく行っていること（すなわち，$\omega = df/f$ または C が切断であるなら，それは 0 になること）と，(18) から，$\widehat{\mathcal{L}}$ と $\widehat{\mathcal{R}}$ の基底に関する行列式が（正規化からくる単純な有理数倍のちがいを除いて）Ω と R の積に等しいことを確かめることは読者にまかせよう．これで定理の証明は終りである．(16) の行列は，$(\widehat{\mathcal{L}} \times \widehat{\mathcal{R}})$ のペアリングで，(19) での有限の高さの寄与が消えるように注意して選び，$\widehat{\mathcal{L}}$ の基底を $\omega_0 = dx/y$ と $\omega_1 = ((y-1)/2x)\omega_0$，$\widehat{\mathcal{R}}$ の基底を $[-3P, P]$ と $[2P, -4P]$ とした特別な場合である．

最後に注意を二つ与える．一つ目は，上で述べたすべてのことは，E を任意の種数 g の曲線に変えたとき，(17) の $\mathbb{Z}$ が $\mathbb{Z}^g$ に変わり，ゆえに，この場合の拡張されたレギュレーターが $(r+g) \times (r+g)$ 行列の行列式になること以外は変化せずにうまくいくことである．二つ目は，数 $\Omega = \int_{E(\mathbb{R})} \omega_0$ は，より一般に臨界値における L-関数値に関するドリーニュ予想の式に現れる周期行列の成分は，“純周期” であり，一方，(16) の行列要素は，より一般に，非臨界値における L-関数値に関するベイリンソン・ショル予想の式に現れる周期行列の成分は，“混合周期” であるということである．ここでの “純” と “混合” という言葉は，その問題の数がそれぞれ，純粋な，そして，混合されたモチーフの周期であることを意味している（§4.2 の終りでの注意を参照せよ）．それらを初等的な方法で正確に定義することはやや難しい．§1.1 の例の中で，数 π，楕円積分，そして，$\Gamma(p/q)^q$ は純周期であり，一方，代数的数の対数，多重ゼータ値，そして，マーラー測度は（一般には）混合周期である．周期が純周期になるための必要な，しかし，十分ではない条件は，それが $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された滑らかな代数多様体の閉代数的微分形式の閉サイクル（すなわち，境界を待たないチェイン）上の積分として表せることである．

3.6 第二係数: コルメッツ予想

ベイリンソン予想は $L(s)$ の整数値 $s=m\in\mathbb{Z}$ におけるローラン展開の第一係数のみを扱っている．一般に，第二係数に対しては興味深い数論的性質は全く期待されない．それにもかかわらず，いくつかの注目すべき例外が存在する．例えば，

$$\zeta(s) \;=\; -\frac{1}{2}+\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\cdot s+\mathrm{O}(s^2),\ s\to 0$$

または，より示唆的な形として，

$$\log\zeta(s) \;=\; \log\left(-\tfrac{1}{2}\right)+\log(2\pi)\cdot s+\mathrm{O}(s^2)$$

である．

■予想 [12]

$$\rho:\ \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \;\to\; GL(n,\overline{\mathbb{Q}})$$

を絶対ガロア群の表現で

$$\rho(\text{複素共役})=-\vec{\mathbf{1}}_{n\times n}$$

なるものとする．そのとき，アルチン L-関数 $L(\rho,s)$ の $s=0$ における対数微分は，虚数乗法を持つアーベル多様体の周期の対数たち有限個の $\overline{\mathbb{Q}}$ 係数の線型結合である．

K_2 を総実な代数体 K_1 の総虚な二次拡大とすると（すなわち，共役はすべて負であるようなある代数的数 α に対し，$K_1=\mathbb{Q}(\alpha)$ かつ $K_2=\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$），そのとき，デデキントゼータ関数の比 $\zeta_{K_2}(s)/\zeta_{K_1}(s)$ は上の予想で考えられた形の L-関数である．この場合，$s=0$ における対数微分はただ一つの周期の対数である．$K_1=\mathbb{Q}$ に対して，これは §2.3 の終りに述べたチャウラ・セルバーグの公式の結果である．

コルメッツはアーベル表現の場合の予想を（予想に現れるすべての体が円分体のとき）自ら証明した．本質的には，それを有理数におけるガンマ関数の値と周期との既知の等式に帰着させたのである．今日，任意の非アーベル表現に対してコルメッツ予想によって予測される等式を証明するアイディアを

持っている人はいないと思われる．ごく最近，吉田敬之がコルメッツ予想を改良し，さまざまな非アーベルの場合での，いくつかの非常に自明ではない数値的確認を行った [28，29].

4　周期とモチーフ

4.1　抽象周期の環

この論文の最後の節では，周期の観点から，モチーフに対する初等的な処理法を提示する．これをするために，第 1 章で与えた周期の定義よりもより "科学的な" 定義が必要である．

X を $\mathbb{Q}$ 上定義される次元 d の滑らかな代数多様体，$D \subset X$ を正規交叉を持つ因子（すなわち，局所的に D は座標超曲面の集合のように見える），$\omega \in \Omega^d(X)$ を最高次数の X 上の代数的微分形式（ゆえに，ω は自動的に閉），そして，$\gamma \in H_d(X(\mathbb{C}), D(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$ を因子 $D(\mathbb{C})$ 上に境界を持つ複素多様体 $X(\mathbb{C})$ 上の特異チェイン（のホモロジー類）とする．積分 $\int_\gamma \omega \in \mathbb{C}$ を四つ組 (X, D, ω, γ) の周期とよぶ．$\mathbb{Q}$ へのスカラー制限関手と標数 0 での特異点の解消を用いることにより，代数的数体 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義される半代数的集合上の代数的形式の収束積分は上のような形式に帰着することができる．

■定義　有効周期の空間 $\mathbf{P}$ を次の関係を法とする上の四つ組の同値類を表す記号 $[(X, D, \omega, \gamma)]$ により生成される $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間として定義する．

(1)　（線型性）$[(X, D, \omega, \gamma)]$ は ω と γ の両方について線型である．

(2)　（変数変換）$f : (X_1, D_1) \to (X_2, D_2)$ が $\mathbb{Q}$ 上定義されている対の射であり，$\gamma_1 \in H_d(X_1(\mathbb{C}), D_1(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$，そして，$\omega_2 \in \Omega^d(X_2)$ ならば，

$$[(X_1, D_1, f^*\omega_2, \gamma_1)] = [(X_2, D_2, \omega_2, f_*(\gamma_1))].$$

(3)　（ストークスの公式）$\tilde{D}$ によって D の正規化を表す（すなわち，局所的にそれは D の既約成分の直和である）．多様体 $\tilde{D}$ は D の二重点からくる正規交叉を持つ因子 $\tilde{D}_1$ を含んでいる．このとき，$\beta \in \Omega^{d-1}(X)$ と $\gamma \in H_d(X(\mathbb{C}), D(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$ に対して，

$$[(X, D, d\beta, \gamma)] = [(\tilde{D}, \tilde{D}_1, \beta_{|\tilde{D}}, \partial\gamma)].$$

ここで，$\partial : H_d(X(\mathbb{C}), D(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) \to H_{d-1}(\tilde{D}(\mathbb{C}), \tilde{D}_1(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$ は境界作用素である．

そのとき，$\mathbf{P}$ から $\mathbb{C}$ への付値準同型 $[(X, D, \omega, \gamma)] \mapsto \int_\gamma \omega$ の像は，まさに，数値周期の集合 $\mathcal{P}$ に等しく，そして，§1.2 の予想 1 は次と同値である．

■予想　付値準同型 $\mathbf{P} \to \mathcal{P}$ は同型である．

例えば，数 π が超越的であるという(既知の)事実は，この予想とドリーニュの重さ理論から導かれる．

積分の積は再び積分になるため(フビニの公式)，有効周期の全体は環をなす．有効周期の環を，$\mathbb{C}$ 内での付値が $2\pi i$ である元を形式的に反転させた，より大きな環 $\widehat{\mathbf{P}}$ に拡張すると便利である．略式には，抽象周期全体の環 $\widehat{\mathbf{P}}$ は $\mathbf{P}[(2\pi i)^{-1}]$ であると言うことができる．

その対数がコルメッツ予想に現れる周期は拡張された環 $\widehat{\mathbf{P}}$ 内の可逆元である．

4.2　モチーフ的ガロア群

環 $\widehat{\mathbf{P}}$ は $\mathbb{Q}$ 上無限生成であるが，有限生成の部分環の帰納極限と書ける．このことは $Spec(\widehat{\mathbf{P}})$ が $\mathbb{Q}$ 上の有限次元アフィンスキームの射影極限であることを意味する．$Spec(\widehat{\mathbf{P}})$ が $\mathbb{Q}$ 上のプロ代数的トルソーの構造を持つことを示そう．

与えられた集合 S 上の集合論的なトルソー(すなわち，群 G の主等質空間)の構造とは，

$$(x, y, z) \mapsto x \cdot y^{-1} \cdot z$$

なる写像 $S^3 \to S$ のことである．ただし，S と G-集合 G とを同一視している．X がプロ代数的トルソーなら，そのとき，X 上の三重積は関数の環 $\mathcal{O}(X)$ 上の三重余積を生じる．

さて，抽象周期の環 $\widehat{\mathbf{P}}$ 上の三重余積を述べよう．(X, D) を，共に $\mathbb{Q}$ 上定義された，滑らかな代数多様体と X の正規交叉を持つ因子の，上のような対と

する．簡単のため，X はアフィンであると仮定してよい．(ジョアノローの手法 [19, Lemme 1.5] を用いることにより，いつでもこの場合に帰着できる．) 代数的ドラムコホモロジー群 $H^*_{\text{de Rham}}(X,D)$ は，このとき，D 上 0 になる X 上の代数的微分形式からなる複体 $\Omega^*(X,D)$ のコホモロジー群として定義することができる．対 (X,D) の周期行列 (P_{ij}) は $H_*(X(\mathbb{C}),D(\mathbb{C});\mathbb{Q})$ の基底 (γ_i) と $H^*_{\text{de Rham}}(X,D)$ の基底 (ω_j) をわたるペアリングからなる．代数幾何からのいくつかの結果を用いることにより，この周期行列が $\mathbf{P}$ 成分の正方行列であり，行列式が $\sqrt{\mathbb{Q}^\times}\cdot(2\pi i)^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ に属することを示すことができる．このことは，この逆行列が拡張された環 $\widehat{\mathbf{P}}=\mathbf{P}[(2\pi i)^{-1}]$ に係数を持つことを意味する．

今，$\widehat{\mathbf{P}}$ 内の三重余積を，任意の周期行列 (P_{ij}) に対し，式

$$\Delta(P_{ij}) := \sum_{k,l} P_{ik}\otimes(P^{-1})_{kl}\otimes P_{lj}$$

で定義する．

例として，$X=\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}\setminus\{0\}$ と $D:=\{1,2\}\subset X$ の対を考えることにする．$H_1(X(\mathbb{C}),D(\mathbb{C});\mathbb{Q})$ の基底は，0 の周りの小さい半径の反時計回りの経路 γ_1 と，区間 $\gamma_2:=[1,2]$ のホモロジー類からなる．$H^1_{\text{de Rham}}(X,D)$ の基底は形式 $\omega_1=z^{-1}dz$ と $\omega_2=dz$ のコホモロジー類からなる．ここで，z は $X=\mathbb{A}^1$ 上の標準座標である．周期行列は $\begin{pmatrix}2\pi i & 0\\ \log(2) & 1\end{pmatrix}$ となる．これから，三重余積に対する次の式を導くことができる:

$$\Delta(2\pi i)=2\pi i\otimes\frac{1}{2\pi i}\otimes 2\pi i\,,$$

$$\Delta(\log(2))=\left(\log(2)\otimes\frac{1}{2\pi i}\otimes 2\pi i\right)-\left(1\otimes\frac{\log(2)}{2\pi i}\otimes 2\pi i\right)+\left(1\otimes 1\otimes\log(2)\right).$$

三重余積がなぜ環 $\widehat{\mathbf{P}}$ でちゃんと定義されたものになっているかは，三重余積が $\widehat{\mathbf{P}}$ の定義関係式をみたすことが自明でないために，明らかなものではない．しかし，これは最近ノリにより証明された次の結果から多少とも自動的に導かれる．

■**定理**　$\mathbb{Q}$ 上の環 $\widehat{\mathbf{P}}$ は二つのコホモロジー理論，ふつうの位相コホモロジー理論

$$H^*_{\mathrm{Betti}} : X \mapsto H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$$

と，代数的ドラムコホモロジー理論

$$H^*_{\mathrm{de\,Rham}} : X \mapsto \mathbf{H}^*(X, \Omega^*_X)$$

との間の同型のなすプロ代数的トルソー上の関数の環である．

ベッチ実現 $G_{M,\mathrm{Betti}}$ 内のモチーフ的ガロア群は，ベッチコホモロジーの側面から，$Spec(\widehat{\mathbf{P}})$ に作用するプロ代数的群として定義される．類似して，ドラムの場合の $G_{M,\mathrm{de\,Rham}}$ を定義できる．モチーフの圏はモチーフ的ガロア群の表現の圏として定義される．両方の実現から作られる圏は，標準的に同一視できるため，どの実現を選ぶかには関係ない．次の初等的な定義も，モチーフの圏と同値な圏を与える．

■**定義**　ランク $r \geq 0$ の**枠付モチーフ**とは，環 $\widehat{\mathbf{P}}$ 係数を持つ可逆な $(r \times r)$ 行列 $(P_{ij})_{1 \leq i,j, \leq r}$ で，任意の i, j に対し，等式

$$\Delta(P_{ij}) = \sum_{k,l} P_{ik} \otimes (P^{-1})_{kl} \otimes P_{lj} \tag{20}$$

をみたすものである．一つの枠付モチーフからもう一つへの射（これは行列

$$P^{(1)} \in GL(r_1, \widehat{\mathbf{P}}),\ \ P^{(2)} \in GL(r_2, \widehat{\mathbf{P}})$$

に対応している）の空間は

$$\left\{ T \in \mathrm{Mat}(r_2 \times r_1, \mathbb{Q}) \mid TP^{(1)} = P^{(2)} T \right\}$$

により定義される．

$\mathbb{Q}$ 上の多様体のコホモロジー群はモチーフの圏の対象として考えることができる．代数幾何の比較同型から，モチーフの l 進実現（これにはガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ が作用する）が存在することが導かれる．

$\overline{\mathbb{Q}}$ 係数の（枠付）モチーフを，$\overline{\mathbb{Q}}$ 上の環 $\widehat{\mathbf{P}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ での等式(20)の解として定義できる．数論におけるすべての L-関数全体は，$\overline{\mathbb{Q}}$ 係数のモチーフの圏のグロタンディーク群 K_0 から $\mathbb{C}$ 上の有理型関数の乗法群への準同型として考えることができる．

もともと，グロタンディークは，いわゆる“純モチーフ”，つまり，非特異射影多様体のコホモロジー空間の自然な直和因子，を導入したのであった．すべての純モチーフはある重さ $j \in \mathbb{Z}$（対応するコホモロジー群の次数）を持つ．重さ j の純モチーフに付随する L-関数の局所因子は，直線 $\Re(s) = j/2$ 上に零点を持つ．純モチーフの圏は半単純であること，および，それは簡約可能プロ代数群 G_M^{pure} の表現の圏と同値であることが予想されている([18] の解説を見よ)．

これとは対比的に，非コンパクト多様体もしくは特異多様体のコホモロジー空間，または多様体の組のコホモロジー空間は，付随次数片が純モチーフであるような自然な重さフィルトレーションを持つ“混合”モチーフとなるはずである．混合モチーフに対しては，グロタンディーク流の良い定義はないが，それらが上で与えられた予想の記述の一つであるプロ代数群の表現により与えられるだろうと考えられている．混合モチーフに対するモチーフ的ガロア群 G_M は，純モチーフの簡約可能モチーフ的ガロア群 G_M^{pure} のプロベキ単群による拡張であると期待される．

純モチーフの周期を閉サイクル上の閉形式の積分として表すことができることを §3.5 の終わりで述べた．これはジョアノロー手法ですぐ出る系であり，また，抽象周期に対しても意味を持つ．一般に，**閉周期**を閉サイクル上の積分に対応する抽象周期として定義する．閉周期がちょうど滑らかな非コンパクト多様体のモチーフの周期であることは簡単に分かる．純周期は閉周期であるが，すべての閉周期が純周期であるわけではない．すなわち，一般には混合周期になる．しかし，閉周期のみを考えることにより，すべての混合周期全体を論じ尽くすことはできないようである．つまり，滑らかな非コンパクト多様体のモチーフの部分商(部分モチーフの剰余モチーフ)として実現できない混合モチーフが存在する．特に，§1.2 で提起された問題と同じ精神により，次を提起する．

■問題 5　予想 1 を仮定しよう．(または，同じことだが，抽象周期で考えよう.)　数 $\log 2$ や，$n \in \mathbb{Z}$ に対し $\pi^n \log 2$（に対応する抽象周期）でさえも，閉サイクル上の閉代数的形式の積分として表せないことを示せ．

現在では，アーベル圏ではなく，単に，“混合モチーフの複体”からなる三

角分割圏を与えるボエボドスキーの理論がある．（有理数係数の）ボエボドスキー圏が，この章で導入されたモチーフ的ガロア群の表現の導来圏に同値であるかどうかは明らかではないが，少なくとも，その芯が G_M の表現の圏と同値である t-構造を持つべきである．

4.3 指数周期

モチーフ的ガロア群とモチーフの定義をまねて超越数のより大きな類を考えることができる．それを**指数周期**とよぶ．それらの数は，また，ブロックとエスノールトによるプレプリント [9] でも考えられている．

■定義 指数周期とは，実半代数的集合上で代数関数と代数関数の指数関数の積の積分として得られる絶対収束積分である．ただし，定義に現れるすべての多項式は代数的数の係数を持つとする．

三つ組 (X, D, f) に対し，指数周期からなる周期行列を定義する．ただし，(X, D) は上のように与え，そして，$f \in \mathcal{O}(X)$ は X 上の正則関数とする．(X, D, f) に対し，ベッチホモロジー空間は対 $(X(\mathbb{C}), D(\mathbb{C}) \cup f^{-1}(\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > C\}))$ の特異ホモロジーとして定義される．ここで，$C \in \mathbb{R}$ は十分に大きいとする．ドラムコホモロジーは，微分が $d_f(\omega) := d\omega - df \wedge \omega$ と与えられた複体 $\Omega^*(X, D)$ のコホモロジーとして定義される．三つ組 (X, D, f) に対する周期行列の要素は，積分 $\int_{\gamma_i} \exp(-f)\,\omega_j$ である．ここで，γ_i はベッチホモロジーの基底を表す実解析的チェインであり，ω_j はドラムコホモロジーの基底を表す．それらの周期行列は正方行列であり，その行列式は $\sqrt{\mathbb{Q}^\times} \cdot (\sqrt{\pi})^{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \cdot \exp(\mathbb{Q})$ に属すことを示すことができる．

単純な例として，$X = \mathbb{A}^1$，$D = \emptyset$，そして，$f(x) = x^2$ とすると，そのとき，周期行列は 1×1 の大きさであり，唯一の要素は

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,dx$$

である．

指数周期全体の環は，数 e，すべての e の代数的ベキ，ガンマ関数の有理数

での値，ベッセル関数値などをはじめとする，多くの良い数を含んでいる．指数ガロア群の単位元の連結成分の可換部分は，いわゆる谷山群と，アンダーソンにより考えられたその拡大群に密接に関係している．§1.2 の予想 1 は，適当な方法により，指数周期の場合に拡張できる．

なお指数モチーフ的ガロア群をさらに拡張できるという最近の示唆がいくつかある．それには新しい周期として，オイラー定数 γ が加わる．これはついでながら $\zeta(s)$ の $s=1$ における定数項である．このように見ると，適当な意味で，すべての古典的定数は周期となる．

参考文献

[1] Y. André: *G-Functions and Geometry.* Aspects of Mathematics **13**. Vieweg, Braunschweig 1989

[2] A. Beilinson: Higher regulators of modular curves. In: *Applications of Algebraic K-theory to Algebraic Geometry and Number Theory*, Contemp. Math. **55**. Amer. Math. Soc., Providence 1986, pp. 1–34

[3] F. Beukers: A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$. *Bull. London Math. Soc.* **11** (1979), 268–272

[4] F. Beukers: Algebraic values of G-functions. *J. Reine Angew. Math.* **434** (1993), 45–65

[5] F. Beukers, E. Calabi and J. Kolk: Sums of generalized harmonic series and volumes. *Nieuw Arch. Wisk.* **11** (1993), 217–224

[6] F. Beukers and G. Heckman: Monodromy for the hypergeometric function ${}_nF_{n-1}$. *Inv. math.* **95** (1989), 325–354

[7] F. Beukers and J. Wolfart: Algebraic values of hypergeometric functions. In: *New Advances in Transcendence Theory* (ed. A. Baker). Cambridge University Press (1988), 68–81

[8] S. Bloch: A note on height pairings, Tamagawa numbers, and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture. *Inv. math.* **58** (1980), 65–76

[9] S. Bloch and H. Esnault: Gauss-Manin determinant connections and periods for irregular connections. Preprint, Essen 1999

[10] A. Borel: Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zêta aux points entiers. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **4** (1977), 613–636

[11] D. W. Boyd: Mahler's measure and special values of L-functions. *Experiment. Math.* **7** (1998), 37–82

[12] P. Colmez: Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe. *Ann. Math.* **138** (1993), 625–683

[13] P. Deligne: Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales. In: *Automorphic forms, Representations, and L-functions*, Proc. Symp. Pure Math. **33**. Amer. Math. Soc., Providence 1979, pp. 313–346

[14] C. Deninger and A. Scholl: The Beilinson conjectures. In: *L-functions and Arithmetic*, London Math. Soc. Lecture Notes **153** (eds. J. Coates and M. J. Taylor). Cambridge University Press, Cambridge 1991, pp. 173–209

[15] B. Gross and D. Zagier: Heegner points and derivatives of L-series. *Inv. Math.* **85** (1986), 225–320

[16] B. Gross, W. Kohnen and D. Zagier: Heegner points and derivatives of L-series. II. *Math. Annalen* **278** (1987), 497–562

[17] W. Hulsbergen: *Conjectures in Arithmetic Algebraic Geometry.* Aspects of Mathematics **18**. Vieweg, Braunschweig 1992

[18] U. Jannsen, S. Kleiman, J.-P. Serre (eds.): *Motives.* Proc. Symp. Pure Math. **55**. AMS, Providence 1994

[19] J.-P. Jouanolou: Une suite exacte de Mayer-Vietoris en K-theorie algebrique. In: *Algebraic K-theory. I*, Lecture Notes in Math. **341**. Springer, Berlin Heidelberg 1973, pp. 293–316

[20] F. Rodriguez Villegas: Modular Mahler Measures I. In: *Topics in Number Theory (University Park, PA, 1997)*, Math. Appl. **467**. Kluwer, Dordrecht 1999, pp. 17–48

[21] A. Scholl: Remarks on special values of L-functions. In: *L-functions and Arithmetic*, London Math. Soc. Lecture Notes **153** (eds. J. Coates and M. J. Taylor). Cambridge University Press, Cambridge 1991, pp. 373–392

[22] D. Shanks: Incredible identities. *Fibonacci Quart.* **12** (1974), 271, 280

[23] D. Shanks: Dihedral quartic approximations and series for π. *J. Numb. Th.* **14** (1982), 397–423

[24] H. Stark: Values of L-functions at $s = 1$, I-IV. *Adv. Math.* **7** (1971), 301–343; **17** (1975), 60–92; **22** (1976), 64–84; **35** (1980), 197–235

[25] J. Tate: *Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en* $s = 0$. Prog. in Math. **47**. Birkhäuser, Boston 1984

[26] A. Weil: Elliptic functions acccording to Eisenstein and Kronecker. Ergebnisse der Math. **88**. Springer, Berlin Heidelberg 1976

[27] N. J. Wildberger: Real fish, real numbers, real jobs. *The Mathematical Intelligencer* **21** (1999), 4–7

[28] H. Yoshida: On absolute CM-periods. In: *Automorphic Forms, Automorphic Representations and Arithmetic (Fort Worth, TX, 1996)*, Proc. Sympos. Pure Math. **66**, Amer. Math. Soc., Providence 1999, pp. 221–278

[29] H. Yoshida: On absolute CM-periods. II. *Amer. J. Math.* **120** (1998), 1199–1236

[30] D. Zagier: Polylogarithms, Dedekind zeta functions and the algebraic K-theory of fields. In: *Arithmetic Algebraic Geometry*, Progr. Math. **89**. Birkhäuser, Boston 1991, pp. 391–430

[31] D. Zagier: Some strange 3-adic identities (Solution to Problem 6625). *Amer. Math. Monthly* **99** (1992), 66–69

[32] D. Zagier: Values of zeta functions and their applications. In: *First European Congress of Mathematics*, Volume II, Progress in Math. **120**. Birkhäuser, Basel 1994, pp. 497–512

[33] D. Zagier and H. Gangl: Classical and elliptic polylogarithms and special values of L-series. In: *The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles*, Nato Science Series C **548**. Kluwer, Dordrecht 2000, pp. 561–615